Vol. 34 (2014)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

关于 $f+a(f^{(k)})^n$ 值分布的一个注记

孙承雄

(云南师范大学数学学院, 云南 昆明 650092)
(宣威九中数学教研室, 云南 宣威 655400)

摘 要: 本文研究亚纯函数的值分布问题. 利用值分布理论, 获得了一个带精简密指量的模分布的不等式, 改进了 Xu 和 Yang 等人的结果.

关 键 词: 亚纯函数; 微分多项式; 值分布
MR(2010) **主题分类号**: 30D35 **中 图 分 类 号**: O174.52
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2014)01-0151-04

1 引言

设 f 是复平面上的非常数亚纯函数. 我们采用值分布论中的标准符号、术语及结果 [1,2]: $T(r,f), N(r,f), \overline{N}(r,f), m(r,f), \cdots$. $S(r,f)$ 表示一个当 $r\to\infty$ 时, $S(r,f)=o\{T(r,f)\}$ 的函数 (当 f 是无穷级时, 需去掉一个具有有穷线性测度的例外集).

1959 年, Hayman [3] 证明了

定理 A [3] 设 f 是超越亚纯函数, $a(\neq 0)$ 有穷复数, 则对任意正整数 $n\geq 5$, $f'+af^n$ 取每一个有穷复数无穷多次.

1979 年, Mues [4] 指出, 当 $n=3$ 或 4 时, 定理 A 不成立.

1994 年, 叶 [5] 研究了一个类似的问题, 证明了

定理 B [5] 设 f 是超越亚纯函数, $a(\neq 0), b$ 为两个有穷复数, 则对任意正整数 $n\geq 3$,

$$(n-1)T(r,f')\leq 4\overline{N}(r,f)+9N(r,\frac{1}{f+a(f')^n-b})+S(r,f).$$

2008 年, 方明亮和 Lawrence Zaclman [6] 改进了定理 B , 证明了

定理 C [6] 设 f 是超越亚纯函数, $a(\neq 0), b$ 为两个有穷复数, 则对任意正整数 $n\geq 3$,

$$(n-1)T(r,f')\leq 3\overline{N}(r,f)+4N(r,\frac{1}{f+a(f')^n-b})+S(r,f').$$

2009 年, 徐炎、吴凤琴和廖良文 [7] 改进了定理 C , 证明了

定理 D [7] 设 f 是超越亚纯函数, $a(\neq 0), b$ 为两个有穷复数, n,k 为两个正整数. 若 $n\geq k+2$, 则

$$(n-1)T(r,f^{(k)})\leq (k^2+k+1)\overline{N}(r,f)+(k+1)^2N(r,\frac{1}{f+a(f^{(k)})^n-b})+S(r,f^{(k)}).$$

*收稿日期: 2012-11-17 接收日期: 2013-01-19
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11061086).
作者简介: 孙承雄 (1980–), 男, 云南宣威, 硕士, 主要研究方向: 复分析. E–mail:15287403900@163.com.

一个自然的问题就是: 定理 D 中的 $N(r,\frac{1}{f+a(f^{(k)})^n-b})$ 是否可以用 $\overline{N}(r,\frac{1}{f+a(f^{(k)})^n-b})$ 来代替? 本文研究了这一问题, 证明了下面的结论.

定理 1 设 f 为超越亚纯函数, $a(\neq 0), b$ 为两个有穷复数, n,k 为两个正整数. 若 $n\geq k+2$, 则

$$(n-1)T(r,f^{(k)})\leq (k^2+k+1)\overline{N}(r,f)+(k+1)^2\overline{N}(r,\frac{1}{f+a(f^{(k)})^n-b})+S(r,f^{(k)}).$$

2 引理

设 S_{tj} $(j=0,1,\cdots,k;t=1,2,\cdots,n)$ 是非负整数, $\phi_t(z)=\alpha_t(z)\prod\limits_{j=0}^{k}(f^{(j)}(z))^{S_{tj}}$, 其中 $\alpha_t(z)\not\equiv 0$, 且满足 $T(r,\alpha_t)=S(r,f)$, 称 $P(z)=\sum\limits_{t=1}^{n}\phi_t(z)$ 为 f 的微分多项式. 设

$$\overline{d}(P)=\max_{1\leq t\leq n}\sum_{j=0}^{k}S_{tj},\ \ \underline{d}(P)=\min_{1\leq t\leq n}\sum_{j=0}^{k}S_{tj}.$$

则 $\overline{d}(P)$ 为 P 的次数, $\underline{d}(P)$ 为微分单项式的最小次数. 若 $\overline{d}(P)=\underline{d}(P)$, 则 P 为齐次的, 否则为非齐次的.

引理 1 [8] 设 f 是超越亚纯函数, P 是一个关于 f 的非常数微分多项式且 $\underline{d}(P)\geq 2$, 置 $Q=\max\limits_{1\leq t\leq n}\{\sum\limits_{j=1}^{k}jS_{tj}\}$, 则 $\underline{d}(P)T(r,f)\leq (Q+1)\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,\frac{1}{P-1})+S(r,f)$.

证 根据文献 [8] 定理 1 的证明后半部分, 若省略不等式 $\overline{N}(r,f)\leq T(r,f)$, 而保留 $\overline{N}(r,f)$ 这一项, 我们可以得到引理 1 的结论.

引理 2 设 f 是超越亚纯函数, $a(\neq 0), c(\neq 0)$ 是两个有穷复数, n,k 是两个正整数使得 $n\geq k+2$, 设 P 是微分多项式, 满足

$$P=af^{n-k-1}\times[\frac{n!}{(n-k)!}(f')^k+\frac{C_k^2 n!}{(n-k+1)}f\times(f')^{k-2}f''+\cdots+nf^{k-1}f^{(k)}],$$

则 $(n-1)T(r,f)\leq (k+1)\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,\frac{1}{P-c})+S(r,f)$.

证 简单计算可得 $\underline{d}(P)=n-1$, $Q=k$. 注意到 $n-1\geq k+1\geq 2$, 则由引理 1 可直接得出引理 2 结论.

引理 3 [9] 设 f 是复平面上满足 $f^{(k+1)}\not\equiv 0$ 的一个亚纯函数, k 是正整数, 则有

$$m(r,\frac{f^{(k)}}{f})=S(r,f^{(k)}).$$

3 定理 1 的证明

设

$$g=f+a(f^{(k)})^n-b,\ \phi=\frac{g^{(k)}}{g}. \tag{1}$$

若 $\phi\equiv 0$, 则 $g^{(k)}\equiv 0$, 即

$$f^{(k)}(1+P(f^{(k)}))\equiv 0, \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned}P(f^{(k)}) &= a(f^{(k)})^{n-k-1}\times[\frac{n!}{(n-k)!}(f^{(k+1)})^k+\frac{C_k^2 n!}{(n-k+1)!}f^{(k)}\\ &\quad\times(f^{(k+1)})^{k-2}f^{(k+2)}+\cdots+n(f^{(k)})^{k-1}f^{(2k)}],\end{aligned}$$

$P(f^{(k)})$ 是一个次数为 $n-1$ 的齐次微分多项式.

由 (2) 式可知 f 是复平面上的整函数. 若存在 z_0 使得 $f^{(k)}(z_0)\neq 0$, 则存在 $\delta>0$ 使得 $f^{(k)}(z)\neq 0, z\in D_\delta(z_0)$, 则由 (2) 式可得 $1+P(f^{(k)})\equiv 0, z\in D_\delta(z_0)$. 于是, 根据唯一性定理, 对复平面上的复数有 $1+P(f^{(k)})\equiv 0$.

若存在 z_0 使得 $1+P(f^{(k)})(z_0)\neq 0$, 则存在 $\delta>0$ 使得 $1+P(f^{(k)})(z)\neq 0, z\in D_\delta(z_0)$, 则由 (2) 式可得 $f^{(k)}(z)\equiv 0, z\in D_\delta(z_0)$. 因此, 根据唯一性定理, 对复平面上的复数有 $f^{(k)}(z)\equiv 0$.

因此 $f^{(k)}(z)\equiv 0$, 或者 $1+P(f^{(k)})\equiv 0$. 从而 f 是次数至多为 $k-1$ 或者次数为 $2k$ 的多项式, 这与 f 是超越亚纯函数矛盾. 因此 $\phi\not\equiv 0$.

根据亚纯函数值分布理论和 (1), 得 $T(r,g^{(k)})\le O(T(r,f^{(k)}))$, 并结合引理 3, 可得

$$m(r,\phi)=S(r,f^{(k)}). \tag{3}$$

由 (1) 得

$$f^{(k)}(1+P(f^{(k)}))=\phi(f+a(f^{(k)})^n-b). \tag{4}$$

若 $f^{(k)}(z_0)=0$, 则 $1+P(f^{(k)})(z_0)=1\neq 0$. 另一方面, 若 $1+P(f^{(k)})(z_0)=0$, 则 $f^{(k)}(z_0)\neq 0$ (否则 $f^{(k)}(z_0)=0$, 则 $1+P(f^{(k)})(z_0)=1$ 矛盾). 因此 f 与 $1+P(f^{(k)})$ 的零点互不相同. 再由 (4) 式可知 f 与 $1+P(f^{(k)})$ 的零点来源于 ϕ 或者 $f+a(f^{(k)})^n-b$ 的零点.

于是由第一基本定理与 (3)–(4) 式, 有

$$\begin{aligned}&\bar N(r,\tfrac{1}{f^{(k)}})+\bar N(r,\tfrac{1}{P(f^{(k)})+1})\le \bar N(r,\tfrac{1}{\phi})+\bar N(r,\tfrac{1}{g})\\ \le\ & N(r,\phi)+\bar N(r,\tfrac{1}{g})+S(r,f^{(k)})\\ \le\ & k\bar N(r,f)+(k+1)\bar N(r,\tfrac{1}{g})+S(r,f^{(k)}).\end{aligned} \tag{5}$$

设 $h=f^{(k)}$, 则 $h'=f^{(k+1)}, h''=f^{(k+2)}$,

$$P(h)=ah^{n-k-1}\times\left[\frac{n!}{(n-k)!}(h')^k+\frac{C_k^2 n!}{(n-k+1)}h\times(h')^{k-2}h''+\cdots+nh^{k-1}h^{(k)}\right].$$

显然 $Q=k$, $\underline{d}(P)=n-1$, 于是由引理 2 得

$$(n-1)T(r,h)\le (k+1)\overline{N}(r,\frac{1}{h})+\overline{N}(r,h)+\overline{N}(r,\frac{1}{P(h)+1})+S(r,h). \tag{6}$$

把 $h=f^{(k)}$ 代人 (6) 得

$$(n-1)T(r,f^{(k)})\le (k+1)\overline{N}(r,\frac{1}{f^{(k)}})+\overline{N}(r,f^{(k)})+\overline{N}(r,\frac{1}{P(f^{(k)})+1})+S(r,f^{(k)}). \tag{7}$$

由 (5)–(7) 式可得

$$\begin{aligned}(n-1)T(r,f^{(k)}) &\le (k+1)\overline{N}(r,\frac{1}{f^{(k)}})+\overline{N}(r,f^{(k)})+\overline{N}(r,\frac{1}{P(f^{(k)})+1})+S(r,f^{(k)})\\ &\le (k+1)[\overline{N}(r,\frac{1}{f^{(k)}})+\overline{N}(r,\frac{1}{P(f^{(k)})+1})]+\overline{N}(r,f^{(k)})+S(r,f^{(k)})\\ &\le (k+1)[k\overline{N}(r,f)+(k+1)\overline{N}(r,\frac{1}{g})]+\overline{N}(r,f)+S(r,f^{(k)})\\ &= (k^2+k+1)\overline{N}(r,f)+(k+1)^2\overline{N}(r,\frac{1}{f+a(f^{(k)})^n-b})+S(r,f^{(k)}).\end{aligned}$$

因此，定理 1 证毕.

参 考 文 献

[1] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] Yang Lo. Value distribution theory [M]. Beijing: Science Press, 1993.

[3] Hayman W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives [J]. Ann. of Math., 1959, 70: 9–42.

[4] Mues E. Über ein problem von Hayman [J]. Math. Z., 1979, 164: 239–259.

[5] Ye Y S. A picard type theorem and Bloch law [J]. Chinese Ann. Math. Ser. B, 1994, 15: 75–80.

[6] Fang M L, Zalcman L. On the value distribution of $f+a(f')^n$ [J]. Sci. China Ser. A Math., 2008, 38(3): 279–285.

[7] Xu Y, Wu F Q, Liao L W. Picard values and normal families of meromorphic functions [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 2009, 139A: 1091–1099.

[8] Hinchliff J D. On a result of Chuang related to Hayman's alternative [J]. Computational Methods and Function Theory, 2002, 2: 293–297.

[9] Yang Lo. Precise fundamental inequalities and sum of deficiences [J]. Sci. China Ser. A Math., 1991, (34): 157–165.

A NOTE ON THE VALUE DISTRIBUTION OF $f+a(f^{(k)})^n$

SUN Cheng-xiong

(*School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming 650092, China*)

(*Department of Mathematics, Xuanwei Senior School, Xuanwei 655400, China*)

Abstract: In this article, we study the value distribution of meromorphic functions. By using value distribution theory, we get a stronger inequality, involving $\overline{N}$ rather than N, which generalizes the related results of Xu and Yang et al.

Keywords: meromorphic functions; differential polynomial; value distribution.

2010 MR Subject Classification: 30D35