Vol. 34 (2014)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

关于任意随机可积序列的一个强收敛定理

陶林零，杨卫国，程小军
(江苏大学理学院, 江苏 镇江 212013)

摘 要: 本文研究了可积随机适应序列强收敛定理的问题. 利用构造截尾停时以及鞅差序列的方法, 获得了一类任意积随机适应序列的强收敛定理, 推广了若干已知的结果.

关键词: 强收敛定理; 鞅差序列; 强大数定律
MR(2010) **主题分类号**: 60F15 **中图分类号**: O211.4
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2014)01-0145-06

1 主要结果

设 $(X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0)$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一可积随机适应序列, 即 $\mathcal{F}_n$ 是一非降 σ 域 $(\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1})$, X_n 可积的且是 $\mathcal{F}_n$ 可测的.

下面给出万成高在整个空间上的的收敛定理, 参见文献 [1].

定理 A 设 $(X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0)$ 是任意可积随机适应序列, $(a_n, n \geq 0)$ 是非降的正常数列, 若下列条件成立:

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[\frac{|X_n|^p}{a_n{}^p + a_n|X_n|^{p-1}}|\mathcal{F}_{n-1}] < \infty, 1 \leq p \leq 2, \tag{1}$$

则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n - E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]}{a_n} \quad \text{a.e. 收敛.}$$

类似定理 A 我们给出一个集合上的强收敛定理.

定理 B 设 $(X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0)$ 是任意可积随机适应序列, $(a_n, n \geq 0)$ 是非降的正常数列. 设

$$A = \{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} E[\frac{|X_n|^p}{a_n{}^p + a_n|X_n|^{p-1}}|\mathcal{F}_{n-1}] < \infty\}, 1 \leq p \leq 2, \tag{2}$$

则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n - E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]}{a_n} \quad \text{在 } A \text{ 中 a.e. 收敛.} \tag{3}$$

定理 A 在条件 (1) 下成立, 定理 B 在条件 (2) 下成立. 定理 B 更优, 因为它推广了 Chow 的鞅差序列的强大数定理. 本文是利用文献 [2] 的方法给出定理 B 的证明.

2 结果证明

*收稿日期: 2011-11-30 接收日期: 2012-04-11
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11071104).
作者简介: 陶林零 (1988–), 女, 江西上饶, 硕士, 主要研究方向: 概率论与数理统计.

定理 B 的证明 设 $n \ge 0, X_n^* = X_n I_{(|X_n| \le a_n)}$. 记 $Z_n = \frac{|X_n|^p}{a_n^p + a_n |X_n|^{p-1}}$, 设 k 为正整数,

$$A_k = \{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} E[Z_n | \mathcal{F}_{n-1}] \le k\}, \tag{4}$$

$$\tau_k = \inf\{n : n \ge 1, \sum_{i=1}^{n+1} E[Z_i | \mathcal{F}_{i-1}] > k\}, \tag{5}$$

当 (5) 式的右边集为空集时, 令 $\tau_k = \infty$, 这样 $\sum\limits_{m=1}^{\tau_k \Lambda n} Z_m = \sum\limits_{m=1}^{n} I_{(\tau_k \ge m)} Z_m$. 由于 $I_{(\tau_k \ge m)}$ 是 $\mathcal{F}_{m-1}$ 可测的, 由 Z_n 的非负性, $\forall n$, 有

$$\begin{aligned} E(\sum_{m=1}^{\tau_k \Lambda n} Z_m) &= E(\sum_{m=1}^{n} I_{(\tau_k \ge m)} Z_m) = E\{\sum_{m=1}^{n} E[I_{(\tau_k \ge m)} Z_m | \mathcal{F}_{m-1}]\} \\ &= E\{\sum_{m=1}^{n} I_{(\tau_k \ge m)} E[Z_m | \mathcal{F}_{m-1}]\} = E\{\sum_{m=1}^{\tau_k \Lambda n} E[Z_m | \mathcal{F}_{m-1}]\} \le k. \end{aligned} \tag{6}$$

由于 $A_k = \{\tau_k = \infty\}$, 于是由 (6) 式, $\forall n$ 有

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{n} \int_{A_k} Z_m dP = \sum_{m=1}^{n} E[I_{A_k} Z_m] = E\{I_{A_k} \sum_{m=1}^{n} Z_m\} = E\{I_{(\tau_k = \infty)} \sum_{m=1}^{n} Z_m\} \\ =& E\{I_{(\tau_k = \infty)} \sum_{m=1}^{\tau_k \Lambda n} Z_m\} \le E(\sum_{m=1}^{\tau_k \Lambda n} Z_m) \le k, \end{aligned} \tag{7}$$

因此可得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_k} Z_m dP \le k. \tag{8}$$

由于当 $|X_n| > a_n$ 时, $\frac{1}{Z_n} = (\frac{a_n}{|X_n|})^p + \frac{a_n}{|X_n|} \le 2 \quad (1 \le p \le 2)$, 于是有

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} P(A_k(X_n \ne X_n^*)) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_k(X_n \ne X_n^*)} dP \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_k(X_n \ne X_n^*)} 2Z_n dP \\ \le& \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_k} 2Z_n dP \le 2k. \end{aligned} \tag{9}$$

于是由 Borel-Cantelli 引理知 $P(A_k(X_n \ne X_n^*) \text{ i.o.}) = 0$, 于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - X_n^*)/a_n \ \text{ 在 } A_k \text{ 中 a.e. 收敛.}$$

由于 $A = \bigcup\limits_{k} A_k$, 所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - X_n^*)/a_n \ \text{ 在 } A \text{ 中 a.e. 收敛.} \tag{10}$$

设

$$Y_m = (X_m^* - E[X_m^*|\mathcal{F}_{m-1}])/a_m. \tag{11}$$

设 $\lambda = 1, -1$ 且

$$t_n(\lambda) = \frac{\exp\{\lambda \sum\limits_{m=1}^{n} Y_m\}}{\prod\limits_{m=1}^{n} E[\exp(\lambda Y_m)|\mathcal{F}_{m-1}]} \qquad n \geq 1, \tag{12}$$

由于 $E[t_n|\mathcal{F}_{n-1}] = t_{n-1}$ 且 $E|t_n(\lambda)| = Et_n(\lambda) = Et_1(\lambda) = 1$, 故 $\{t_n(\lambda), n \geq 1\}$ 为非负鞅, 由 Doob 鞅收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty} t_n(\lambda) = t_\infty(\lambda) \ \text{ a.e.}, \tag{13}$$

由不等式

$$0 \leq \exp(x) - 1 - x \leq x^2 \exp(|x|) \qquad \forall x \in R, \tag{14}$$

注意到 $|Y_n| \leq 2$, 且 $E[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] = 0$ a.e. 及

$$\begin{aligned} E[Y_n^2|F_{n-1}] &= E[((X_n^* - E[X_n^*|\mathcal{F}_{n-1}])/a_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= (E[(X_n^*)^2|\mathcal{F}_{n-1}] - (E[X_n^*|\mathcal{F}_{n-1}])^2)/a_n^2 \\ &\leq E[(X_n^*)^2|\mathcal{F}_{n-1}]/a_n^2 \qquad \text{a.e.}, \end{aligned} \tag{15}$$

有

$$\begin{aligned} &0 \leq E[\exp(\lambda Y_n)|\mathcal{F}_{n-1}] - 1 = E[\exp(\lambda Y_n) - \lambda Y_n - 1|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &\quad \leq E[|\lambda Y_n|^2 e^{|\lambda Y_n|}|\mathcal{F}_{n-1}] \leq e^2 E[Y_n^2|\mathcal{F}_{n-1}] \leq e^2 E[(X_n^*)^2|\mathcal{F}_{n-1}]/a_n^2 \qquad \text{a.e.}, \end{aligned} \tag{16}$$

由于 $|X_n| \leq a_n$ 时, $|X_n^*| \leq a_n$, 并且 $f(x) = \frac{|x|^p}{a^p + a|x|^{p-1}}$ $(a > 0)$ 在 $[0, +\infty)$ 是单调递增的, 有

$$(\frac{X_n^*}{a_n})^2 \leq (\frac{|X_n^*|}{a_n})^p = \frac{|X_n^*|^p}{a_n^p + a_n|X_n^*|^{p-1}} \cdot \frac{a_n^p + a_n|X_n^*|^{p-1}}{|a_n^*|^p} \leq 2Z_n \qquad (1 \leq p \leq 2), \tag{17}$$

由 (16) 与 (17) 式有

$$0 \leq E[\exp(\lambda Y_n)|\mathcal{F}_{n-1}] - 1 \leq 2e^2 E[Z_n|\mathcal{F}_{n-1}] \qquad \text{a.e.}, \tag{18}$$

由 (18) 与 (2) 式是有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (E[\exp(\lambda Y_n)|\mathcal{F}_{n-1}] - 1])$ 在 A 中 a.e. 收敛, 或等价地

$$\prod_{n=1}^{\infty} E[\exp(\lambda Y_n)|\mathcal{F}_{n-1}] \ \text{ 在 } A \text{ 中 a.e. 收敛.} \tag{19}$$

由 (12), (13) 和 (19) 式有

$$\lim_{n\to\infty} \exp\{\lambda \sum_{m=1}^{n} Y_m\} \ \text{ 在 } A \text{ 中 a.e. 收敛.} \tag{20}$$

因为上式对 $\lambda=1,-1$ 成立, 所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} (X_n^* - E[X_n^*|\mathcal{F}_{n-1}])/a_n \quad \text{在 } A \text{ 中 a.e. 收敛.} \tag{21}$$

当 $|X_n| > a_n$ 时有

$$(\frac{|X_n|}{a_n}) = \frac{|X_n|^p}{a_n^p + a_n|X_n|^{p-1}} \cdot \frac{a_n^{p-1} + a_n|X_n|^{p-1}}{|X_n|^{p-1}} \le 2Z_n \qquad (1 \le p \le 2), \tag{22}$$

所以有

$$\begin{aligned} &|E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - E[X_n^*|\mathcal{F}_{n-1}])/a_n| \le E[|X_n - X_n^*|/a_n|\mathcal{F}_{n-1}] \\ =&E[|X_n|/a_n I_{(|X_n|>a_n)}|\mathcal{F}_{n-1}] \le E[2Z_n I_{(|X_n|>a_n)}|\mathcal{F}_{n-1}] \le 2E[2Z_n|\mathcal{F}_{n-1}] \qquad \text{a.e..} \end{aligned} \tag{23}$$

由 (23) 和 (2) 式有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (E[X_n|\mathcal{F}_{n-1} - E[X_n^*|\mathcal{F}_{n-1}])/a_n \quad \text{在 } A \text{ 中 a.e. 收敛.} \tag{24}$$

由 (10), (21) 及 (24) 知 (3) 式成立.

注 在定理 B 中令 $P(A)=1$, 可得定理 A.

推论 1 设 $(X_n, \mathcal{F}_n, n \ge 0)$ 是鞅差序列, $\{a_n, n \ge 0\}$ 是非降的正数列. 设 A 由 (2) 定义, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a_n} \quad \text{在 } A \text{ 中 a.e. 收敛.} \tag{25}$$

证 注意到 $E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]=0$, 于是从定理 B 可得本推论.

推论 2 (Chow, 参见文献 [3, 第 249 页练习 8] 设 $(X_n, \mathcal{F}_n, n \ge 0)$ 是鞅差序列, $\{a_n, n \ge 0\}$ 是非降的正数列. 设

$$B = \{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-p} E[|X_n|^p|\mathcal{F}_{n-1}] < \infty\}, 1 \le p \le 2, \tag{26}$$

则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a_n} \quad \text{在 } B \text{ 中 a.e. 收敛.} \tag{27}$$

证 令 A 如定理 B 定义, 因为 $\frac{|X_n|^p}{a_n^p + a_n|X_n|^{p-1}} \le \frac{|X_n|^p}{a_n^p}$, 则有 $B \subseteq A$, 由推论 1 可得本推论.

推论 3 $\{X_n, n \ge 1\}$ 为独立的随机变量序列, $\{a_n, n \ge 1\}$ 如前定义. 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left[\frac{|X_n|^p}{a_n^p + a_n|X_n|^{p-1}}\right] < \infty \quad 1 \le p \le 2. \tag{28}$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{X_n - EX_n}{a_n}$ a.e.收敛.

证 在定理 B 中取 $\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, 由于 $\{X_n,n\ge 1\}$ 为独立的随机变量序列, 故有

$$E\left[\frac{|X_n|^p}{a_n^p+a_n|X_n|^{p-1}}\,|\mathcal{F}_{n-1}\right]=E\left[\frac{|X_n|^p}{a_n^p+a_n|X_n|^{p-1}}\right]\quad \text{a.e.}$$

及 $E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]=EX_n$ a.e.. 由定理 A 可得本推论.

由推论 3 易证以下两推论.

推论 4 (参见文献 [4, p.387]) 设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 为独立的随机变量序列, 且 $EX_n=0$, 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\frac{X_n^2}{1+|X_n|}<\infty,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_n$ a.e.收敛.

推论 5 (Kolmogorov, 参见文献 [4, p.389]) 设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 为独立的随机变量序列, $\{a_n,n\ge 1\}$ 如前定义. 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{EX_n^2}{a_n^2}<\infty, \tag{29}$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{X_n-EX_n}{a_n}$ a.e.收敛.

显然推论 3 是推论 5 的推广, 这是因为当 $p=2$ 时条件 (28) 比条件 (29) 弱. 下面的例子证明了当 $p=2$ 时 (28) 比 (29)“真弱”.

例 1 设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 为独立的随机变量序列, X_n 的分布密度为

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{2}{n^2x^3} & x\ge 1/n,\\ 0 & x<1/n.\end{cases}$$

要证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{EX_n^2}{n^2}=+\infty,\sum_{n=1}^{\infty}E\left[\frac{X_n^2}{n^2+n|X_n|}\right]<\infty.$$

事实上, 由于 $EX_n^2=\displaystyle\int_{1/n}^{\infty}\frac{2}{n^2x}dx=+\infty$, 所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{EX_n^2}{n^2}=+\infty$, 又因为

$$E\left[\frac{X_n^2}{n^2+n|X_n|}\right]=\int_{1/n}^{\infty}\frac{2}{n^2x^3}\frac{x^2}{n^2+nx}dx=\int_{1/n}^{\infty}\frac{2n}{n^3}\left(\frac{1}{n^2x}-\frac{1}{n^2x+n^3}\right)dx=\frac{2}{n^4}\ln\left(1+n^2\right),$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^4}\ln\left(1+n^2\right)<\infty.$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\left[\frac{X_n^2}{n^2+n|X_n|}\right]<\infty.$$

所以当 $a_n=n,p=2$ 时, $\{X_n,n\ge 1\}$ 满足 (28) 式, 但不满足 (29) 式.

参 考 文 献

[1] 万成高. 马氏过程函数的强大数定律 [J]. 数学研究, 2007, 40(1): 72–79.

[2] 刘文, 杨卫国, 张丽娜. 关于任意随机变量序列的一类强极限定理 [J]. 数学学报, 1997, 40(4): 537–544.

[3] Chow Y S, Teicher H. Probability theory (2nd ed.)[M]. New York: Springer-Verlag, 1974.

[4] Shiryaev A N. Probability (2nd ed.) [M]. New York: Springer-Verlag, 2004.

A CLASS OF STRONG CONVERGENCE THEOREMS FOR THE INTEGRABLE SEQUENCE OF ARBITRARY RANDOM VARIABLES

TAO Lin-ling , YANG Wei-guo , CHENG Xiao-jun

(*Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China*)

Abstract: In this paper, the strong convergence theorems for the integrable sequence of arbitrary random variables are studied. By using the methods of constructing censored stopping time and martingale difference sequences, we obtain a class of strong convergence theorems for the integrable sequence of arbitrary random variables. As corollaries, which generalize some known results.

Keywords: strong convergence theorems; martingale difference sequence; strong law of large numbers

2010 MR Subject Classification: 60F15