

零积决定的三角代数

谢乐平¹, 王登银²

(1. 怀化学院数学系, 湖南 怀化 418008)

(2. 中国矿业大学数学系, 江苏 徐州 221116)

摘 要: 本文研究了三角代数是否是零积决定的代数的问题. 利用零积决定的代数的等价条件和代数方法, 获得了三角代数是零积决定的代数的条件, 推广了矩阵代数是零积决定的代数的结果. 作为应用, 得到零积决定的代数的零积导子一定是准导子.

关键词: 三角代数; 零积决定的代数; 零积导子; 准导子

MR(2010) 主题分类号: 15B35; 17B40

中图分类号: O151.21

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)01-0130-07

1 引言

Leger 和 Luks 在文献 [4] 中提出了李代数的准导子的概念, 王登银在文献 [5] 中提出了零积导子的概念. 我们知道, 导子都是准导子也是零积导子, 但是准导子和零积导子都不一定是导子, 那么零积导子是否是准导子?

Brešar 在文献 [1] 中定义了零 (李, Jordan) 积决定的代数. 我们发现, 在零积决定的代数上零积导子一定是准导子.

设 R 是有单位元的交换环. 三角代数 Δ 是指如下形式的代数,

$$\begin{pmatrix} A & M \\ & B \end{pmatrix},$$

其中 A, B 是环 R 上有单位元的代数, M 是左 A 模和右 B 模的 (A, B) -双模. 显然, 上三角矩阵代数, 分块上三角矩阵代数和有限维套代数都是三角代数的具体例子.

设 R 为交换环, $\mathcal{A}$ 是 R 上代数 (可以是非结合的) 且其上的乘法记为 $*$. 设 X 是一个 R -模. 对 $x, y \in \mathcal{A}$ 我们记所有 $x * y$ 为 $\mathcal{A}^2$. 假设 $\{, \}: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow X$ 是 R -双线性映射. 考虑如下两个条件:

(i) 对 $x, y \in \mathcal{A}$, 如果 $x * y = 0$, 则 $\{x, y\} = 0$.

(ii) 对任意 $x, y \in \mathcal{A}$, 存在一个 R -线性映射 $\phi: \mathcal{A}^2 \rightarrow X$ 满足 $\{x, y\} = \phi(x * y)$.

显然, (ii) 可以推出 (i). 如果对任意 R -模 X 和 R -双线性映射 $\{, \}: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow X$, 还由 (i) 可以推出 (ii), 如果此二条件成立, 则我们称 $\mathcal{A}$ 是零积决定的代数.

如果代数 $\mathcal{A}$ 中存在单位元 I , 则对任意 $x \in \mathcal{A}$ 可以定义 R -线性映射 $\phi: \mathcal{A}^2 \rightarrow X$ 为 $\phi(x) = \{x, I\}$, 从而有 (ii) 等价于下面的 (ii)'.

*收稿日期: 2012-08-05

接收日期: 2013-01-16

基金项目: 湖南省教育厅资助项目 (05C694); 怀化学院资助项目 (HHUY2012-01).

作者简介: 谢乐平 (1976-), 男, 湖南宁乡, 讲师, 研究方向: 矩阵代数.

(ii)' 对任意 $x, y \in \mathcal{A}$, R -线性映射 $\{, \}: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow X$ 满足 $\{x, y\} = \{x * y, I\}$.

假设 $\mathcal{A}$ 是结合代数, 如果取 $*$ 为李运算 $[x, y] = xy - yx$, 则 $\mathcal{A}$ 成为一个李代数, 我们称 $\mathcal{A}$ 是零李积决定的代数, 是指 $\mathcal{A}$ 对李运算是零积决定的代数, 也就是说对任意 R -双线性映射 $\{, \}: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow X$, 存在 R -线性映射 $\phi: [\mathcal{A}, \mathcal{A}] \rightarrow X$ 使得 $\{, \}$ 为 $\{x, y\} = \phi([x, y])$, 且由 $[x, y] = 0$ 一定可得 $\{x, y\} = 0$. 类似的, 取 $*$ 为 Jordan 积 $x \circ y = xy + yx$, 则 $\mathcal{A}$ 成为一个 Jordan 代数, 我们称 $\mathcal{A}$ 是零 Jordan 积决定的代数, 是指 $\mathcal{A}$ 作为 Jordan 代数是一个零积决定的代数, 也就是说, $\{, \}$ 具有形式 $\{x, y\} = \phi(x \circ y)$, 并且由 $x \circ y = 0$ 一定有 $\{x, y\} = 0$.

Brešar 在 2009 年的文 [1] 中论述了如果 B 是有单位元的代数, 那么全矩阵代数 $M_n(B)$ 是零积 (也是零李积和零 Jordan 积) 决定的代数, 并且给出了零积决定的代数在保持线性映射和同态方面的一些应用. 后来 Grašić 在文献 [2] 中给出了两种类型的李代数都是零李积保持的. 王登银在文献 [3] 中证明了有限维单李代数的所有抛物子代数也是零李积保持的, 这个结论能应用于决定零积导子 (见文献 [3] 中定理 3.1) 和描述双边交换保持映射 (见文献 [3] 中定理 4.1, 4.2).

记 $1_A, 1_B$ 分别为代数 A, B 的单位元, 1 为三角代数 Δ 的单位元, 引入如下记号:

$$e = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = 1 - e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix}.$$

对于三角代数 Δ , 下列引理是显然成立的.

引理 1.1 设 R 是有单位元的交换环, A, B 是 R 上有单位元的代数, M 是一一的 (A, B) -双模. 记 Δ 表示三角代数, 则 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 分别是同构于 A, B 的 Δ 的子代数.

根据引理 1.1, 为了简化我们引入类似于文献 [6] 中的记法, 记 $x = \begin{pmatrix} a & m \\ & b \end{pmatrix} \in \Delta$ 为

$$x = exe + exf + fxf = a + m + b.$$

2 主要结论

首先给出一个简单引理.

引理 2.1 如果 Γ 是零积 (零李积或者零 Jordan 积) 决定的代数, 代数 Θ 同构于 Γ , 则 Θ 也是零积 (零李积或者零 Jordan 积) 决定的代数.

接下来的三个定理是本文的主要结论.

定理 2.2 设 R 是有单位元的交换环, A, B 是 R 上的结合代数, M 是 (A, B) -双模, $\Delta = \begin{pmatrix} A & M \\ & B \end{pmatrix}$ 为三角代数. 如果 A, B 是零积决定的代数, 则 Δ 也是零积决定的.

证 记 1 为 Δ 的单位元, 下面只需证明 (i) 能推出 (ii)'. 记 $\{, \}: \Delta \times \Delta \rightarrow X$ 表示如果 $xy = 0$ 则 $\{x, y\} = 0$ 的双线性映射.

对 Δ 中的元 $x = \begin{pmatrix} a & m \\ & b \end{pmatrix} = a + m + b, y = \begin{pmatrix} a' & m' \\ & b' \end{pmatrix} = a' + m' + b'$, 由 $mm' =$

$$\begin{pmatrix} 0 & m \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m' \\ & 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ 和 } ab' = ba' = 0 \text{ 可得}$$

$$\{m, m'\} = \{a, b'\} = \{b, a'\} = 0. \quad (1)$$

由 $(a + am')(m' - f) = 0$ 可得

$$\{a, m'\} = \{am', f\}. \quad (2)$$

由 $(am' + b)(-e + m') = 0$, 可得

$$\{b, m'\} = \{am', e\}. \quad (3)$$

结合 (2) 和 (3) 式可得

$$\{a, m'\} + \{b, m'\} = \{am', 1\}. \quad (4)$$

由 $(m - mb')a' = 0$ 有 $\{m, a'\} = \{mb', a'\}$, 再由 $mb'(a' - e) = 0$ 有 $\{mb', a'\} = \{mb', e\}$, 因此可得

$$\{m, a'\} = \{mb', e\}. \quad (5)$$

由 $(m + e)(b' - mb') = 0$ 有 $\{m, b'\} = \{e, mb'\}$, 再由 $(e - mb')(mb' + f) = 0$ 有 $\{e, mb'\} = \{mb', f\}$, 因此可得

$$\{m, b'\} = \{mb', f\}. \quad (6)$$

结合 (5) 和 (6) 式可得

$$\{m, a'\} + \{m, b'\} = \{mb', 1\}. \quad (7)$$

如果 A 是零积决定的代数, 由引理 1.1, 引理 2.1 和 (ii)' 可得 $\{a, a'\} = \{aa', 1\}$. 类似的如果 B 是零积决定的代数则 $\{b, b'\} = \{bb', 1\}$, 再结合 (1), (4), (7) 式可得

$$\begin{aligned} \{x, y\} &= \{a, a'\} + \{a, m'\} + \{a, b'\} + \{m, a'\} + \{m, m'\} + \{m, b'\} + \{b, a'\} + \{b, m'\} + \{b, b'\} \\ &= \{a, a'\} + \{a, m'\} + \{m, a'\} + \{m, b'\} + \{b, m'\} + \{b, b'\} \\ &= \{aa', 1\} + \{bb', 1\} + (\{a, m'\} + \{m, a'\} + \{m, b'\} + \{b, m'\}) \\ &= \{aa', 1\} + \{bb', 1\} + \{am' + mb', 1\} \\ &= \{xy, 1\}. \end{aligned}$$

我们得到了 (ii)' 成立, 所以 Δ 是零积决定的代数.

定理 2.3 设 R 是有单位元的交换环, A, B 是 R 上的结合代数, M 是 (A, B) -双模, 假设 Δ 包含 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}f$. 如果 A, B 是零积决定的代数, 则 Δ 也是零积决定的.

证 不难看出 Δ 对运算 $\circ$ 作为 Jordan 代数时, $\frac{1}{2}$ 为单位元.

记 $\{, \} : \Delta \times \Delta \rightarrow X$ 是满足下列条件的双线性映射: 只要 $x \circ y = 0$ 就有 $\{x, y\} = 0$.

取 Δ 中的元 $x = a + m + b, y = a' + m' + b'$.

为了简便, 对任意 $\bar{m} \in M$, 我们先得到等式 (8)–(10) 式,

$$\{e, \bar{m}\} = \{\bar{m}, f\}. \quad (8)$$

由 $(e - \bar{m}) \circ (\bar{m} + f) = 0$ 和 $(f - \bar{m}) \circ (\bar{m} + e) = 0$ 可得

$$\{f, \bar{m}\} = \{\bar{m}, e\}. \quad (9)$$

由 $\bar{m} \circ (f - (\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}e)) = \bar{m} \circ (e - (\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}e)) = 0$ 可得

$$\{\bar{m}, f\} = \{\bar{m}, \frac{1}{2}\}, \{\bar{m}, e\} = \{\bar{m}, \frac{1}{2}\}. \quad (10)$$

由 $(a + am') \circ (m' - f) = 0$ 有 $\{a, m'\} = \{am', f\}$. 类似地由 $(m + e) \circ (b' - mb') = 0$ 有 $\{m, b'\} = \{e, mb'\}$, 再结合 (8), (10) 式可得

$$\{a, m'\} + \{m, b'\} = \{am' + mb', f\} = \{am' + mb', \frac{1}{2}\}. \quad (11)$$

由 $(m'b + b) \circ (-e + m') = 0$ 有 $\{b, m'\} = \{m'b, e\}$, 同样由 $(m + f) \circ (a' - a'm) = 0$ 有 $\{m, a'\} = \{f, a'm\}$, 再结合 (9), (10) 式可得

$$\{b, m'\} + \{m, a'\} = \{a'm + m'b, e\} = \{a'm + m'b, \frac{1}{2}\}. \quad (12)$$

由 $m \circ m' = a \circ b' = b \circ a' = 0$ 可得

$$\{m, m'\} = \{a, b'\} = \{b, a'\} = 0. \quad (13)$$

如果 A 是零 Jordan 积决定的代数, 注意 Jordan 代数 A 的单位元为 $\frac{1}{2}1_A$, 由引理 1.1, 引理 2.1 和 (ii)' 可得 $\{a, a'\} = \{a \circ a', \frac{1}{2}\}$. 类似的 B 是零 Jordan 积决定的代数从而 $\{b, b'\} = \{b \circ b', \frac{1}{2}\}$, 再结合 (11)–(13) 式有

$$\begin{aligned} \{x, y\} &= \{a, a'\} + \{a, m'\} + \{a, b'\} + \{m, a'\} + \{m, m'\} + \{m, b'\} + \{b, a'\} + \{b, m'\} + \{b, b'\} \\ &= \{a, a'\} + \{a, m'\} + \{m, a'\} + \{m, b'\} + \{b, m'\} + \{b, b'\} \\ &= \{a, a'\} + \{b, b'\} + (\{a, m'\} + \{m, a'\} + \{m, b'\} + \{b, m'\}) \\ &= \{a \circ a', \frac{1}{2}\} + \{b \circ b', \frac{1}{2}\} + \{am' + mb' + a'm + m'b, \frac{1}{2}\} \\ &= \{x \circ y, \frac{1}{2}\}. \end{aligned}$$

对任意 $x \in \Delta$, 我们定义满足 $\{x, \frac{1}{2}\} = \phi(x \circ \frac{1}{2}) = \phi(x)$ 的 R -线性映射 $\phi: \Delta \circ \Delta \rightarrow X$. 则对所有 $x, y \in \Delta$ 有 ϕ 满足 $\{x, y\} = \phi(x \circ y)$, 也就是说 Δ 是零 Jordan 积决定的.

定理 2.4 设 R 是有单位元的交换环, A, B 是 R 上的结合代数, M 是 (A, B) -双模, Δ 是三角代数. 如果 A, B 是零李积决定的代数, 则 Δ 也是零李积决定的.

证 取满足只要 $[x, y] = 0$ 就有 $\{x, y\} = 0$ 的双线性映射 $\{, \}: \Delta \times \Delta \rightarrow X$.

为了简化证明过程我们先给出几个等式 (14)–(16), 取 $\bar{a} \in A, \bar{m}, \bar{m}' \in M, \bar{b} \in B$. 由 $[e - \bar{m}, \bar{m} + f] = 0 = [f - \bar{m}, \bar{m} + e]$ 可得

$$\{e, \bar{m}\} = \{\bar{m}, f\}, \{f, \bar{m}\} = \{\bar{m}, e\}. \quad (14)$$

由 $[\overline{m}, e + f] = 0$ 可得

$$\{\overline{m}, e\} = \{-\overline{m}, f\}. \quad (15)$$

由 $[\overline{m}, \overline{m'}] = [\overline{a}, \overline{b}] = [\overline{b}, \overline{a}] = 0$, 可得

$$\{\overline{m}, \overline{m'}\} = \{\overline{a}, \overline{b}\} = \{\overline{b}, \overline{a}\} = 0. \quad (16)$$

任取 Δ 中的元 $x = a + m + b, y = a' + m' + b'$.

由 $[(a + am'), (m' - f)] = 0$ 可得

$$\{a, m'\} = \{am', f\}. \quad (17)$$

由 $[(m'b + b), (-e + m')] = 0$ 有 $\{b, m'\} = \{m'b, e\}$, 在 (15) 式中用 $m'b$ 代替 $\overline{m}$ 可得

$$\{b, m'\} = \{-m'b, f\}. \quad (18)$$

由 $[(m + f), (a' - a'm)] = 0$ 有 $\{m, a'\} = \{f, a'm\}$, 再结合 (14), (15) 式可得

$$\{m, a'\} = \{-a'm, f\}. \quad (19)$$

由 $[(m + e), (b' - mb')] = 0$ 有 $\{m, b'\} = \{e, mb'\}$, 在 (14) 式中用 $m'b$ 代替 $\overline{m}$ 可得

$$\{m, b'\} = \{mb', f\}. \quad (20)$$

假设 $x_i = a_i + m_i + b_i, y_i = a'_i + m'_i + b'_i \in \Delta (i = 1, 2, \dots, n)$ 满足 $\Sigma_{i=1}^n [x_i, y_i] = 0$.

下面只需证明 $\Sigma_{i=1}^n \{x_i, y_i\} = 0$ 即可. 根据式 (16)–(20),

$$\begin{aligned} \Sigma_{i=1}^n \{x_i, y_i\} &= \Sigma_{i=1}^n \{a_i, a'_i\} + \Sigma_{i=1}^n \{a_i, m'_i\} + \Sigma_{i=1}^n \{a_i, b'_i\} + \Sigma_{i=1}^n \{m_i, a'_i\} + \Sigma_{i=1}^n \{m_i, m'_i\} \\ &\quad + \Sigma_{i=1}^n \{m_i, b'_i\} + \Sigma_{i=1}^n \{b_i, a'_i\} + \Sigma_{i=1}^n \{b_i, m'_i\} + \Sigma_{i=1}^n \{b_i, b'_i\} \\ &= \Sigma_{i=1}^n \{a_i, m'_i\} + \Sigma_{i=1}^n \{m_i, a'_i\} + \Sigma_{i=1}^n \{m_i, b'_i\} + \Sigma_{i=1}^n \{b_i, m'_i\} \\ &\quad + \Sigma_{i=1}^n \{a_i, a'_i\} + \Sigma_{i=1}^n \{b_i, b'_i\} \\ &= \Sigma_{i=1}^n \{a_i m'_i - a'_i m_i + m_i b'_i - m'_i b_i, f\} + \Sigma_{i=1}^n \{a_i, a'_i\} + \Sigma_{i=1}^n \{b_i, b'_i\} \\ &= \{\Sigma_{i=1}^n (a_i m'_i - a'_i m_i + m_i b'_i - m'_i b_i), f\} + \Sigma_{i=1}^n \{a_i, a'_i\} + \Sigma_{i=1}^n \{b_i, b'_i\}. \end{aligned}$$

又由于 $\Sigma_{i=1}^n [x_i, y_i] = 0$, 因此有

$$\Sigma_{i=1}^n (a_i m'_i - a'_i m_i + m_i b'_i - m'_i b_i) = 0$$

和

$$\Sigma_{i=1}^n [a_i, a'_i] = \Sigma_{i=1}^n [b_i, b'_i] = 0.$$

还有 A, B 是零李积决定的代数, 结合引理 1.1 和 (ii) 可得

$$\Sigma_{i=1}^n \{a_i, a'_i\} = \Sigma_{i=1}^n \{b_i, b'_i\} = 0.$$

因此 $\Sigma_{i=1}^n \{x_i, y_i\} = 0$.

3 应用于零积导子

文献 [1] 和文献 [3] 给出了零积决定的代数的一些应用, 这一节我们主要讨论它在零积导子方面的一个应用. 文献 [4] 中引入了准导子的概念, 设 δ 是环上的代数, δ 上的线性映射 μ 称为准导子, 是指存在一个线性映射 μ' 使得对所有 $x, y \in \delta$ 有

$$\mu(x)y + x\mu(y) = \mu'(xy).$$

显然, 导子是准导子, 然而在下面的例子中我们可以看出准导子不一定是导子.

例 3.1 设 δ 是环 R 上的代数, c 是一个纯量, 定义线性映射 $\mu: \delta \rightarrow \delta$ 满足 $\mu(x) = cx, \forall x \in \delta$ 和线性映射 $\mu': \delta \rightarrow \delta$ 满足 $\mu'(x) = 2cx, \forall x \in \delta$, 则可以看出 μ 是一个准导子但不是导子.

文献 [5] 中给出了零积导子的概念, 设 δ 是环 R 上的代数, ν 为 δ 上的线性映射, 如果对任意 $x, y \in \delta, xy = 0$ 有 $\nu(x)y + x\nu(y) = 0$, 则称 ν 是 δ 上的零积导子.

注 3.2 设 δ 是环 R 上的代数, ν 是 δ 上的导子或者准导子, 则 ν 一定是零积导子.

那么, 零积导子是导子吗? 当然不一定. 因为零积导子只表示乘积等于零的时候才是一个导子, 而当乘积不为零时是没有具体定义的. 还剩下一个问题: 就是零积导子是准导子吗? 下面的定理将回答这个问题.

定理 3.1 如果 Δ 是零积决定的三角代数, ν 是 Δ 上的零积导子, 则 ν 是 Δ 上的准导子.

证 设 $\nu: \Delta \rightarrow \Delta$ 是 Δ 上的零积导子, 则存在双线性映射 $\varphi(x, y)$ 满足: 对所有 $xy = 0, x, y \in \Delta$ 都有

$$\varphi(x, y) = \nu(x)y + x\nu(y).$$

如果 Δ 是零积决定的三角代数, 则对任意 $x, y \in \Delta$ 都存在一个线性映射 $\nu'(xy)$ 满足

$$\nu'(xy) = \varphi(x, y) = \nu(x)y + x\nu(y),$$

也就是 ν 一定是准导子.

假设 B 是有单位元的代数, $M_n(B)$ 是全矩阵代数, $T_n(B)$ 是 (分块) 上三角矩阵代数. Brešar 在文献 [1] 中提出了一个问题: $M_2(B)$ 是否是零 Jordan 积决定的代数? 根据下面的推论我们可得 $M_2(B)$ 的子代数 $T_2(B)$ 一定是零 Jordan 积决定的代数.

推论 3.2 如果 B 是包含单位元 $\frac{1}{2}$ 的 Jordan 代数, 则对 $n \geq 2$, $T_n(B)$ 是零 Jordan 积决定的代数.

证 我们对 n 采用归纳法证明. 当 $n = 2$ 时, 应用定理 2.3 直接可得 $T_2(B)$ 是零 Jordan 积决定的. 如果 $n \geq 3$, 我们适当分块上三角矩阵代数

$$T_n(B) = \begin{pmatrix} T_{n-1}(B) & X \\ & B \end{pmatrix}.$$

由归纳假设有 $T_{n-1}(B)$ 是零 Jordan 积决定的, 再应用定理 2.3 可得 $T_n(B)$ 也是零 Jordan 积决定的. 从而由归纳法原理得证.

参 考 文 献

- [1] Brešar M, Grašc M, Ortega J S. Zero product determined matrix algebras[J]. Linear Algebra Appl, 2009, 430: 1486–1498.
- [2] Grašc M. Zero product determined classical Lie algebras[J]. Linear Multilinear Alg., 2010, 58(8): 1007–1022.
- [3] Wang D Y, Yu X X, Chen Z X. A class of zero product determined Lie algebras[J]. J. Algebra, 2011, 331: 145–151.
- [4] Leger G F, Luks E M. Generalized derivations of Lie algebras[J]. J. Algebra, 2000, 228: 165–203.
- [5] Wang D Y, Zhang W, Chen Z X. Product zero derivations of parabolic subalgebras of simple Lie algebras[J]. J. Lie Theory, 2010, 20: 167–174.
- [6] Benkovič D. Biderivations of triangular algebras[J]. Linear Algebra Appl., 2009, 431: 1587–1602.

ZERO PRODUCT DETERMINED TRIANGULAR ALGEBRAS

XIE Le-ping¹, WANG Deng-yin²*(1. Department of Mathematics, Huaihua College, Huaihua 418008, China)**(2. Department of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)*

Abstract: This paper researches by algebraic methods whether the triangular algebra is the zero (resp., Lie, Jordan) product determined algebra and obtains that Δ is a zero (resp., Lie, Jordan) product determined algebra if A and B are zero (resp., Lie, Jordan) product determined algebras. It generalizes the results that matrix algebra is zero product determined algebra. Applying these we show that zero product derivations of Δ are quasi-derivations.

Keywords: triangular algebra; zero product determined algebra; zero product derivation; quasi-derivation

2010 MR Subject Classification: 15B35; 17B40