

球面空间中的 Pedoe 不等式与张 - 杨不等式及应用

杨世国^{1,2}, 齐继兵¹, 王 文¹

(1. 合肥师范学院数学系和教师教育研究中心, 安徽 合肥 230061)

(2. 安徽新华学院, 安徽 合肥 230088)

摘要: 本文应用距离几何的理论与方法, 研究了 n 维球面空间中 n 维单形与有限点集的几何不等式问题, 建立了球面空间中 n 维单形一种形式的 Pedoe 不等式与有限点集一种形式的张 - 杨不等式, 并应用它获得 n 维球面空间中 Veljan-Korchmaros 型不等式与 Finsler-Hadwinger 型不等式.

关键词: 球面空间; 单形; 有限点集; 几何不等式

MR(2010) 主题分类号: 51K05

中图分类号: O184

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)01-0123-07

1 引言及主要结果

近 30 年来, 高维几何不等式的研究取得了突破性的进展, 取得了丰富而又深刻的研究成果, Mitrinovic 的专著^[1]收入了很多经典的高维几何不等式. 特别是我国数学家杨路和张景中做了很多开拓性的工作, 取得了很多重要研究成果, 引起了国内外同行专家的极大兴趣和高度评价, 最经典的不等式是 n 维欧氏空间 E^n 中有限点集的张 - 杨不等式^[2,3]与 n 维 Pedoe 不等式^[4,5], 冷岗松^[6]、苏化明^[7]建立了欧氏空间另外两种形式的 n 维 Pedoe 不等式.

设曲率为 $K > 0$ 的 n 维球面空间 $S_n(K)$ 中两个 n 维单形 $\sum(A) = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$, $\sum(A') = \{A'_0, A'_1, \dots, A'_n\}$, 它们的棱长分别为 $a_{ij} = |A_i A_j|$, $a'_{ij} = |A'_i A'_j|$ ($i, j = 0, 1, \dots, n$), 体积分别为 V, V' . 外接球半径分别为 R, R' . 记 $A = (\cos \sqrt{K} a_{ij})_{i,j=0}^n$, $A' = (\cos \sqrt{K} a'_{ij})_{i,j=0}^n$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & A & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad \bar{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

最近杨定华建立了球面空间如下一种形式的 n 维 Pedoe 不等式.

定理 A^[8] 设 $\sum_n(A)$ 与 $\sum_n(A')$ 是 n 维球面空间 $S_n(K)$ 中在同一个 n 维超平面上的两个 n 维单形, 则有

$$(\sin \sqrt{K} V \csc \sqrt{K} R)^{\frac{2}{n}} (\sin \sqrt{K} V' \csc \sqrt{K} R')^{2-\frac{2}{n}} \leq \frac{1}{2^n n(n!)^2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \cos \sqrt{K} a_{ij} \bar{A}'_{ij}, \quad (1)$$

*收稿日期: 2011-12-02

接收日期: 2012-04-11

基金项目: 国家自然科学基金 (60671051) 资助项目; 高等学校博士学科点专项科研基金项目 (20113401110009); 安徽省高等学校自然科学基金项目 (KJ2011B133).

作者简介: 杨世国 (1952-), 男, 安徽明光, 教授, 主要从事距离几何研究.

通讯作者: 齐继兵

其中 $\overline{A'}_{ij}$ 是 $\overline{A'}$ 的元素 $\cos \sqrt{K}a'_{ij}$ 的代数余子式.

本文建立了 n 维球面空间中另一种形式的 n 维 Pedoe 不等式.

定理 1 对球面空间 $S_n(K)$ 中两个 n 维单形 $\sum_n(A)$ 与 $\sum_n(A')$, 成立不等式

$$(\sin \sqrt{K}V)^{\frac{2}{n+1}} (\sin \sqrt{K}V')^{2-\frac{2}{n+1}} \leq \frac{1}{2^n(n+1)(n!)^2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \cos \sqrt{K}a_{ij} A'_{ij}, \quad (2)$$

当 $\cos \sqrt{K}a_{ij} = \cos \sqrt{K}a'_{ij}$ ($i, j = 0, 1, \dots, n$) 时等号成立, 其中 A'_{ij} 是矩阵 A' 的元素 $\cos \sqrt{K}a'_{ij}$ 的代数余子式.

应用球面空间余弦定理^[12] $\cos \theta'_{ij} = \frac{A'_{ij}}{\sqrt{A'_{ii}}\sqrt{A'_{jj}}}$ ($0 \leq i < j \leq n$), 其中 θ'_{ij} 是单形 $\sum_n(A')$ 的顶点 A'_i 、 A'_j 所对两侧面所成的内二面角.

并应用球面单形体积公式^[9]

$$\sqrt{A'_{ii}} = 2^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! \sin \sqrt{K}V'_i, \sqrt{A'_{jj}} = 2^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! \sin \sqrt{K}V'_j,$$

其中 V'_i 是 n 维单形 $\sum_n(A')$ 的顶点 A'_i 所对的侧面 ($n-1$ 维球面单形) 的 $n-1$ 维体积.

可将定理 1 表述为下面形式.

定理 1' 对球面空间 $S_n(K)$ 中两个 n 维单形 $\sum_n(A)$ 与 $\sum_n(A')$, 成立不等式

$$(\sin \sqrt{K}V)^{\frac{2}{n+1}} (\sin \sqrt{K}V')^{2-\frac{2}{n+1}} \leq \frac{1}{2(n+1)n^2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \cos \sqrt{K}a_{ij} \sin \sqrt{K}V'_i \sin \sqrt{K}V'_j \cos \theta'_{ij}, \quad (2')$$

当 $\cos \sqrt{K}a_{ij} = \cos \sqrt{K}a'_{ij}$ ($i, j = 0, 1, \dots, n$) 时等号成立, 其中 A'_{ij} 是矩阵 A' 的元素 $\cos \sqrt{K}a'_{ij}$ 的代数余子式.

设球面空间 $S_n(K)$ 中有限点集 $\sum_N(A) = \{A_0, A_1, \dots, A_N\}$ ($N \geq n$), $\sum_N(A)$ 中任意 $k+1$ 个点 $A_{i_0}, A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ 所生成的 k 维球面单形的 k 维体积为 $V_{i_0 i_1 \dots i_k}$, 外接球半径为 $R_{i_0 i_1 \dots i_k}$. 设实数 $m_i > 0$ ($i = 0, 1, \dots, N$), 记

$$M_k = \sum_{0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq N} m_{i_0} m_{i_1} \dots m_{i_k} \sin^2 \sqrt{K}V_{i_0 i_1 \dots i_k} \csc^2 \sqrt{K}R_{i_0 i_1 \dots i_k},$$

$$M_0 = m_0 + m_1 + \dots + m_N.$$

最近杨定华建立了球面空间如下一张 - 杨型不等式.

定理 B^[8] 设 $S_n(K)$ 中有限点集 $\sum_N(A)$ 共超平面, 质点组 $\{A_i(m_i), i = 0, 1, \dots, N\}$ 的重心在原点, 则

$$M_k^l \geq \frac{[(n-l)!(l!)^3]^k}{[(n-k)!(k!)^3]^l} (n!M_0)^{l-k} M_l^k \quad (1 \leq k < l \leq n) \quad , \quad (3)$$

$$M_k^2 \geq \left(\frac{k+1}{k}\right)^3 \frac{n-k+1}{n-k} M_{k-1} M_{k+1} \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad , \quad (4)$$

(3)、(4) 中等号成立的充要条件是质点集 $\sum_N(A)$ 的 $C-M$ 阵 $\bar{\Lambda}_N$ 的 n 个非零次特征值相等, 其中

$$\bar{\Lambda}_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & \cos \sqrt{K} a_{ij} & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \quad (i, j = 0, 1, \cdots, N).$$

记

$$N_k = \sum_{0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_k \leq N} m_{i_0} m_{i_1} \cdots m_{i_k} \sin^2 \sqrt{K} V_{i_0 i_1 \cdots i_k} \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

$$N_0 = m_0 + m_1 + \cdots + m_N.$$

本文建立了球面空间中另一种形式的张 - 杨不等式.

定理 2 设球面空间 $S_n(K)$ 中有限点集 $\sum_N(A) = \{A_0, A_1, \cdots, A_N\}$ ($N \geq n$), 且它的凸包为 n 维的, 那么对任意组实数 $m_i > 0$ ($i = 0, 1, \cdots, N$), 成立不等式

$$N_k^{l+1} \geq \frac{[(n-l)!(l!)^3(l+1)]^{k+1}}{[(n-k)!(k!)^3(k+1)]^{l+1}} [2(n+1)!]^{l-k} N_l^{k+1} \quad (0 \leq k < l \leq n), \quad (5)$$

$$N_k^2 \geq \frac{(k+1)(k+2)(n-k+1)}{k^2(n-k)} N_{k-1} N_{k+1} \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad (6)$$

等号成立当且仅当矩阵 $D = (\sqrt{m_i m_j} \cos \sqrt{K} a_{ij})_{i,j=0}^N$ 的所有非零特征值皆相等.

下面我们介绍定理 2 的一些应用.

如果我们在定理 2 中取 $\sum_N(A)$ 为 n 维单形 $\sum_n(A)$ 的顶点集, 并在不等式 (5) 中取 $k = n-1, l = n$ 得

推论 1 对 $S_n(K)$ 中 n 维单形 $\sum_n(A)$ 与实数 $m_i > 0$ ($i = 0, 1, \cdots, n$), 有

$$[(\prod_{i=0}^n m_i) \sin^2 \sqrt{K} V]^{\frac{n}{n+1}} \leq \frac{1}{n^2(n+1)} \left(\frac{n!^2}{2}\right)^{\frac{1}{n+1}} \sum_{i=0}^n m_0 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_n \sin^2 \sqrt{K} V_i, \quad (7)$$

当 $\sum_n(A)$ 为正则单形且 $m_0 = m_1 = \cdots = m_n$ 时等号成立, 其中 V_i 是 n 维单形 $\sum_n(A)$ 的顶点 A_i 所对的侧面 ($n-1$ 维球面单形) 的 $n-1$ 维体积.

特别, 在不等式 (7) 中取 $m_j = \sin^2 \sqrt{K} V_j$ ($j = 0, 1, \cdots, n$), 得

推论 2 对 $S_n(K)$ 中 n 维单形 $\sum_n(A)$, 有

$$(\sin \sqrt{K} V)^{\frac{2n}{n+1}} \leq \frac{1}{n^2} \left(\frac{n!^2}{2}\right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\prod_{i=0}^n \sin \sqrt{K} V_i\right)^{\frac{2}{n+1}}, \quad (8)$$

当 $\sum_n(A)$ 正则时等号成立.

不等式 (8) 可视为球面空间 Veljan-Korchmaros 不等式.

用 A_{ii} 表示矩阵 $A = (\cos \sqrt{K} a_{ij})_{i,j=0}^n$ 的元素 $\cos \sqrt{K} a_{ii}$ 的代数余子式. 设 h_i 表示单形 $\sum_n(A)$ 顶点 A_i 到它所对侧面的高, 应用球面单形高的计算公式 [9], 有

$$\sin^2 \sqrt{K} h_i = \frac{\det(A)}{A_{ii}}. \quad (9)$$

应用球面单形体积公式 [8]: $\det(A) = 2^n (n!)^2 \sin^2 \sqrt{K} V$, $A_{ii} = 2^{n-1} (n-1)!^2 \sin^2 \sqrt{K} V_i$. 将上式代入 (9) 式, 得 $\sin \sqrt{K} V_i = \sqrt{2} n \frac{\sin \sqrt{K} V}{\sin \sqrt{K} h_i}$ ($i = 0, 1, \dots, n$). 将上式代入 (8) 式, 得

推论 3 对 $S_n(K)$ 中 n 维单形 $\sum_n(A)$, 有

$$\sin \sqrt{K} V \geq \frac{1}{n! 2^{n/2}} \prod_{i=0}^n \sin \sqrt{K} h_i, \quad (10)$$

当 $\sum_n(A)$ 正则时等号成立.

利用不等式 (8) 可得到球面空间中如下的 Finsler-Hadwinger 不等式

推论 4 对 $S_n(K)$ 中 n 维单形 $\sum_n(A)$, 有

$$\sum_{i=0}^n \sin^2 \sqrt{K} V_i \geq n^2 (n+1) \left(\frac{2}{n!^2}\right)^{\frac{1}{n+1}} (\sin \sqrt{K} V)^{\frac{2n}{n+1}} + \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{0 \leq i < j \leq n} (\sin \sqrt{K} V_i - \sin \sqrt{K} V_j)^2, \quad (11)$$

当 $\sum_n(A)$ 正则时等号成立.

证 为了书写方便起见, 记 $\alpha_i = \sin \sqrt{K} V_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$), (11) 式为

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \geq n^2 (n+1) \left(\frac{2}{n!^2}\right)^{\frac{1}{n+1}} (\sin \sqrt{K} V)^{\frac{2n}{n+1}} + \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{0 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2. \quad (11')$$

不等式 (8) 为

$$\left(\prod_{i=0}^n \alpha_i\right)^{\frac{1}{n+1}} \geq n \left(\frac{\sqrt{2}}{n!}\right)^{\frac{1}{n+1}} (\sin \sqrt{K} V)^{\frac{n}{n+1}}. \quad (8')$$

由不等式 (8') 与算术 - 几何平均不等式, 有

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \geq (n+1) n \left(\frac{\sqrt{2}}{n!}\right)^{\frac{1}{n+1}} (\sin \sqrt{K} V)^{\frac{n}{n+1}}. \quad (12)$$

另外

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 &= n \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 - 2(\alpha_0 \alpha_1 + \alpha_0 \alpha_2 + \dots + \alpha_0 \alpha_n) - 2(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots + \alpha_1 \alpha_n) \\ &\quad - \dots - 2\alpha_{n-1} \alpha_n, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i\right)^2 = \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 + 2(\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \cdots + \alpha_0\alpha_n) + 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_1\alpha_n) + \cdots + 2\alpha_{n-1}\alpha_n. \quad (14)$$

(11') 两边乘以 $(n-1)^2$, 并利用 (13), (14) 两式, 可知不等式 (11') 等价于下面不等式

$$\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i\right)^2 + n(n-3) \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \geq (n-1)^2 n^2 (n+1) \left(\frac{2}{n!^2}\right)^{\frac{1}{n+1}} (\sin \sqrt{K}V)^{\frac{2n}{n+1}}. \quad (15)$$

下证不等式 (15) 成立. 由幂平均不等式有 $\sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \geq \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i\right)^2$, 从而有

$$\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i\right)^2 + n(n-3) \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \geq \frac{(n-1)^2}{n+1} \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i\right)^2. \quad (16)$$

由不等式 (16)、(12) 便得不等式 (15).

在不等式 (5) 中取 $k=1, l=n$, 得球面单形体积与棱长之间不等式关系.

推论 5 对 $S_n(K)$ 中 n 维单形 $\sum_n(A)$ 与实数 $m_i > 0$ ($i=0, 1, \cdots, n$), 有

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} m_i m_j \sin^2 \sqrt{K} a_{ij} \geq \frac{n(n+1)}{4} (n! \prod_{i=0}^n m_i)^{\frac{4}{n+1}} (\sin \sqrt{K}V)^{\frac{4}{n+1}}, \quad (17)$$

当 $m_0 = m_1 = \cdots = m_n$ 且 $\sum_n(A)$ 为正则单形时等号成立.

2 引理与定理的证明

为了证明定理 1, 我们需要引用下面几个引理.

引理 1 ^[10] 设 $\sum_n(A) = \{A_0, A_1, \cdots, A_n\}$ 是 n 维球面空间 $S_n(K)$ 中 n 维单形, 则矩阵 $A = (\cos \sqrt{K} a_{ij})_{i,j=0}^n$ 是 $n+1$ 阶实对称正定矩阵.

引理 2 ^[10] 设 $\sum_N(A) = \{A_0, A_1, \cdots, A_N\}$ ($N \geq n$) 是 $S_n(K)$ 中有限点集, 且它的凸包为 n 维的, 那么矩阵 $(\cos \sqrt{K} a_{ij})_{i,j=0}^N$ 是秩为 $n+1$ 的 $N+1$ 阶实对称半正定矩阵.

定理 1 的证明 由引理 1 可知矩阵 $A = (\cos \sqrt{K} a_{ij})_{i,j=0}^n$ 与 $A' = (\cos \sqrt{K} a'_{ij})_{i,j=0}^n$ 均为 $n+1$ 阶实对称正定矩阵. 设

$$\begin{aligned} f_{ij}(\lambda) &= \cos \sqrt{K} a_{ij} + \lambda \cos \sqrt{K} a'_{ij} \quad (i, j = 0, 1, \cdots, n), \\ F(\lambda) &= (f_{ij}(\lambda))_{i,j=0}^n = (\cos \sqrt{K} a_{ij} + \lambda \cos \sqrt{K} a'_{ij})_{i,j=0}^n. \end{aligned}$$

现考虑方程 $F(\lambda) = \det(A + \lambda A') = 0$ 的根

$$F(\lambda) = \det(A + \lambda A') = C_0 \lambda^{n+1} + C_1 \lambda^n + \cdots + C_n \lambda + C_{n+1}, \quad (18)$$

由于 A, A' 皆为 $n+1$ 阶实对称正定矩阵, 因此这些系数 $C_0, C_1, \cdots, C_{n+1}$ 皆为非负的. 于是方程 $F(\lambda) = 0$ 的所有根皆为非正的, 由方程根与系数关系, 以及 Maclaurin 不等式 ^[11], 有

$$\frac{1}{\binom{n+1}{1}} \cdot \frac{C_1}{C_0} \geq \left(\frac{1}{\binom{n+1}{2}} \cdot \frac{C_2}{C_0}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\frac{1}{\binom{n+1}{3}} \cdot \frac{C_3}{C_0}\right)^{\frac{1}{3}} \geq \cdots \geq \left(\frac{C_{n+1}}{C_0}\right)^{\frac{1}{n+1}}. \quad (19)$$

由此可知等号成立当且仅当 $F(\lambda) = 0$ 的所有根皆相等. 由不等式 (19) 有

$$C_1 \geq (n+1)C_0^{1-\frac{1}{n+1}}(C_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}. \quad (20)$$

另一方面经直接计算有

$$C_0 = \det(A'), C_{n+1} = \det(A), C_1 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \cos \sqrt{K} a_{ij} A'_{ij}. \quad (21)$$

由球面单形体积公式 [8]:

$$\det A = 2^n (n!)^2 \sin^2 \sqrt{K} V, \det A' = 2^n (n!)^2 \sin^2 \sqrt{K} V'. \quad (22)$$

将 (21)、(22) 两式代入 (20) 式, 得

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \cos \sqrt{K} a_{ij} A'_{ij} \geq (n+1) 2^n (n!)^2 (\sin \sqrt{K} V)^{\frac{2}{n+1}} (\sin \sqrt{K} V')^{2-\frac{2}{n+1}},$$

所以不等式 (2) 成立. 易验证当 $\cos \sqrt{K} a_{ij} = \cos \sqrt{K} a'_{ij}$ ($i, j = 0, 1, \dots, n$) 时等号成立.

定理 2 的证明 由于 $m_i > 0$ ($i = 0, 1, \dots, N$), 由引理 2 可知矩阵

$$D = (\sqrt{m_i m_j} \cos \sqrt{K} a_{ij})_{i,j=0}^N$$

是秩为 $n+1$ 的实对称半正定矩阵 (当 $N = n$ 时为正定矩阵).

用 $D_{i_0 i_1 \dots i_k}$ 表示矩阵 D 第 $i_0, i_1, \dots, i_k$ 行与第 $i_0, i_1, \dots, i_k$ 列相交元素构成的 $k+1$ 阶主子阵, 则由球面单形体积公式 [7]:

$$|D_{i_0 i_1 \dots i_k}| = m_{i_0} m_{i_1} \dots m_{i_k} 2^k (k!)^2 \sin^2 \sqrt{K} V_{i_0 i_1 \dots i_k},$$

矩阵 D 的特征多项式 $P(\lambda) = \det(D + \lambda I_{N+1})$ (I_{N+1} 为 $N+1$ 阶单位矩阵) 有 $n+1$ 个正根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$, 其余根皆为零.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ 的 $k+1$ 次初等对称多项式为 σ_{k+1} , 则 σ_{k+1} 等于矩阵 D 的所有 $k+1$ 阶主子式之和, 即

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= m_0 + m_1 + \dots + m_N = N_0, \\ \sigma_{k+1} &= \sum_{0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq N} |D_{i_0 i_1 \dots i_k}| = 2^k (k!)^2 \sum_{0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq N} m_{i_0} m_{i_1} \dots m_{i_k} \sin^2 \sqrt{K} V_{i_0 i_1 \dots i_k} \\ &= 2^k (k!)^2 N_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (23)$$

由 Maclaurin 不等式和 Newton 不等式 [11]

$$((\frac{n+1}{l+1}))^{k+1} \sigma_{k+1}^{l+1} \geq ((\frac{n+1}{k+1}))^{l+1} \sigma_{l+1}^{k+1} \quad (k < l), \quad (24)$$

$$(\frac{n+1}{k}) (\frac{n+1}{k+2}) \sigma_{k+1}^2 \geq ((\frac{n+1}{k+1}))^2 \sigma_k \sigma_{k+2} \quad (25)$$

等号成立当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1}$.

由 (23)、(24) 式便得不等式 (5), 由 (23)、(25) 式便得不等式 (6). 易知当矩阵 D 的所有非零特征值皆相等时等号成立.

参 考 文 献

- [1] Mitrinovic D S, Pecaric J E, Volenec V. Recent advances in geometric inequalities[M]. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1989.
- [2] 杨路, 张景中. 关于有限点集的一类几何不等式 [J]. 数学学报, 1980, 23(5): 740–749.
- [3] 张景中, 杨路. 关于质点组的一类几何不等式 [J]. 中国科学技术大学学报, 1981, 11(2): 1–8.
- [4] Yang Lu, Zhang Jingzhong. A generalization to several dimension of the Neuberg-Pedoe inequality with applications[J]. Bull. Austral Math., 1983, 27(2): 203–214.
- [5] 杨路, 张景中. Neuberg-Pedoe 不等式的高维推广及其应用 [J]. 数学学报, 1981, 24(3): 401–408.
- [6] 冷岗松, 唐立华. 再论 Pedoe 不等式的高维推广及应用 [J]. 数学学报, 1997, 40(1): 14–21.
- [7] Su H M. Two inequalities for the simplexes[J]. Chinese Sci. Bull., 1987, 32(1): 1–3.
- [8] 杨定华. 高维非 Euclid 几何的几个基本不等式 [J]. 中国科学 (A 辑), 2006, 36(12): 1327–1342.
- [9] Yang S G. Two results on metric addition in spherical space[J]. Northeast Math. J., 1997, 13(3): 357–360.
- [10] Blumenthal L M. Theory and applications of distance geometry[M]. New York: Chelsea Publishing Company, 1970.
- [11] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities (2nd ed.)[M]. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952.
- [12] 杨世国. 非欧空间中双基本图形的度量方程及其应用 [J]. 数学研究与评论, 2001, 21(2): 311–316.
- [13] 杨世国, 齐继兵. 高维情形的 Routh 定理 [J]. 数学杂志, 2011, 31(1): 152–156.
- [14] 杨世国. 常曲率空间中有限点集的两类几何不等式 [J]. 数学杂志, 2006, 26(6): 665–668.

THE PEDOE INEQUALITY AND ZHANG-YANG INEQUALITY IN
THE SPHERICAL SPACE WITH APPLICATIONSYANG Shi-guo^{1,2}, QI Ji-bing¹, WANG Wen¹

(1. Department of Mathematical and Center of Research for Teacher and Education,
Hefei Normal University, Hefei 230061, China)

(2. Anhui Xinhua University, Hefei 230088, China)

Abstract: In this paper, we study the problems about geometric inequalities for n -dimensional simplexes and finite point sets in the n -dimensional spherical space by theory and method of distance geometry. A form of Pedoe inequality for n -dimensional simplexes and a form of Zhang-Yang inequality for finite point sets in the spherical space are established. From this we obtain the Veljan-Korchmaros inequality and the Finsler-Hadwinger inequality in the n -dimensional spherical space.

Keywords: spherical space; simplex; finite point sets; geometric inequality

2010 MR Subject Classification: 51K05