Vol. 34 (2014)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

二层规划的神经网络解法

彭爱民
(湖北第二师范学院数学与数量经济学院, 湖北 武汉 430205)

摘 要: 本文研究了基于神经网络的二层规划问题. 利用互补松弛条件的扰动, 获得了二层规划问题局部最优解的充分条件, 克服了互补松弛条件不满足约束规格的局限性, 并给出了相应的神经网络求解方法, 从而求解原二层规划问题, 数值实验表明算法有效.

关 键 词: 二层规划; 扰动; 约束规格; 神经网络
MR(2010) **主题分类号:** 90C30 **中图分类号:** O221.2
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2014)01-0111-05

1 引言

二层规划问题因为广泛的实际应用而倍受关注 [1,2], 然而即使约束条件是线性的, 二层规划问题的求解仍然是 NP 难的. 一般是利用下层规划的 KKT 条件将二层规划转化为单层规划. 由于互补松弛条件的存在使得约束规格不成立 [3−6], 从而很多传统的非线性规划的解法无法应用. 因此, 我们对于转化后的单层问题给出扰动, 然后讨论扰动问题的解、收敛性以及与原二层规划解之间的关系. 人工神经网络是一非线性动力学系统, 它具有大规模并行协同处理能力. 利用神经网络方法求解最优化问题近年来发展迅速 [7]. 本文讨论了二层规划问题一种神经网络方法, 最后是相关的数据实验.

考虑二层规划问题：

$$\begin{array}{lll} \text{(UP)} & \min\limits_{x\in X} F(x,y), & \\ & \text{s.t.}\quad G(x,y)\geq 0, & \qquad\qquad \text{(BLP)} \\ \text{(LP)} & \min\limits_{y\in Y} f(x,y), & \\ & \text{s.t.}\quad g(x,y)\geq 0, & \end{array}$$

其中

$$F,f:R^{n_1+n_2}\to R G:R^{n_1+n_2}\to R^{m_1} g:R^{n_1+n_2}\to R^{m_2} X\subset R^{n_1} Y\subset R^{n_2}$$

是二阶连续可微函数, (UP), (LP) 分别表示上、下层规划, 分别是上、下层规划的决策变量.

本文中我们假设: (A1) 对任意给定 $x\in\{x|\exists y,\text{s.t. } G(x,y)\geq 0 g(x,y)\geq 0\}$, 下层规划 (LP) 是满足 MFCQ 的凸规划.

(A2) BLP 问题的约束域 $S=\{(x,y):G(x,y)\geq 0, g(x,y)\geq 0\}$ 是非空紧集.

*收稿日期: 2012-11-24 接收日期: 2012-11-05
作者简介: 彭爱民 (1968–) 男, 湖北浠水, 讲师, 主要研究方向: 最优化理论与应用.

在 (A1) 和 (A2) 条件下, BLP 可变为

$$\begin{aligned}&\min_{x,y,\lambda}\quad F(x,y),\\ \text{s.t.}\quad & G(x,y)\geq 0,\\ & \nabla_y L(x,y,\lambda)=0,\\ & \lambda^T g(x,y)=0,\\ & g(x,y)\geq 0,\\ & \lambda\geq 0,\end{aligned}\qquad \text{(SP)}$$

其中 $\lambda^T g(x,y)=0$ 叫互补松弛条件, $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)$ 是下层规划的 Lagrange 函数. 显然问题属于 MPEC. 然而, MPEC 问题在可行域内任何点均不满足 MFCQ 约束规格 (Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification), 更不用说线性独立规格 (LICQ). 为此, 我们引进 MPEC-LICQ 定义.

为方便起见, 引进以下记号: 记 $x'=(x,y,\lambda), G_I=I_G=\{i\,|G_i=0\}\,, K=\{k\,|\lambda_k=0\}$.

定义 1 对于 MPEC 问题, 除互补松弛条件以外, 其他积极约束条件线性独立我们称为 MPEC-LICQ, 对于 SP 是

$$M=\begin{pmatrix}\nabla_x G_I & \nabla_y G_I & 0\\ \nabla_x f+\nabla^2_{yx}\lambda^T g & \nabla_y f+\nabla^2_{yy}\lambda^T g & \nabla_y g_{K^C}\\ \nabla_x g_J & \nabla_y g_J & 0\end{pmatrix}$$

行满秩.

定义 2 对于 MPEC 问题

$$\begin{aligned}&\min f(x,y)\\ &\text{s.t.}\quad \min\{g_1(x,y),g_2(x,y)\}=0,\end{aligned}$$

若 z 满足 $\{\nabla g_i(z)\cdot d\,|i:g_i(z)=0\}=0, i=1,2$, 称点为 B - 稳定点.

2 扰动

因为许多传统非线性规划算法依赖于线性独立约束规格 (LICQ), 而 MPEC 问题可行域内所有点均不满足, 为了避免这一困难, 我们考虑扰动的规划问题:

$$\begin{aligned}&\min_{x,y,\lambda}\quad F(x,y),\\ \text{s.t.}\quad & G(x,y)\geq 0,\\ & \nabla_y L(x,y,\lambda)=0,\\ & \lambda^T g(x,y)\leq \varepsilon_n,\\ & g(x,y)\geq 0,\\ & \lambda\geq 0.\end{aligned}\qquad \text{(SP)}$$

由文献 [4, 6], 有下述命题.

命题 1 如果在 BLP 问题的可行点 $\bar{x'}_n$ 处 MPEC-LICQ 成立, 则存在 $\bar{x'}_n$ 的邻域 U 以及 $\varepsilon>0$, 使得 LICQ 在任一点 $z\in U\cap F(\mathrm{SP}_{\varepsilon_n})$ 成立 [4].

定理 1 若 $\bar{x'}_n$ 是的 B - 稳定点, 且在 $\bar{x'}_n$ 处 MPEC-LICQ、二阶充分条件成立, 则 $\bar{x'}_n$ 是 BLP 问题的局部最优解, 且存在 $\bar{x'}_n$ 的邻域 U 和 $\bar{\varepsilon}$, 使得对 $\varepsilon_n<\bar{\varepsilon}$ 有唯一的稳定点 $\bar{x'}_n, \bar{x'}_n\to\bar{x'}$.

定理 1 的证明 当 $\bar{x'}_n$ 是 SP 的 B - 稳定点且二阶充分条件成立时, $\bar{x'}_n$ 是 SP 的严格局部极小值点, 此时

$$BD=\left\{d\;\middle|\;\begin{array}{l} d^T\nabla G_j(\bar{x'})\begin{cases}\ge 0(\gamma_j=0),\\ =0(\gamma_j>0),\end{cases} j\in J_G(\bar{x'}),\\ d^T\nabla g_i(\bar{x'})\begin{cases}\ge 0(\eta_i=0),\\ =0(\eta_i>0),\end{cases} i\in I_g(\bar{x'}),\\ d^T\nabla \lambda_i(\bar{x'})\begin{cases}\ge 0(\upsilon_j=0),\\ =0(\upsilon_j>0),\end{cases} i\in I_\lambda(\bar{x'}),\\ d^T\nabla g_i(\bar{x'})=0,\ i\in I_g\backslash I_\lambda,\\ d^T\nabla \lambda_i(\bar{x'})=0,\ i\in I_\lambda\backslash I_g.\end{array}\right\}$$

由文献 [4] 中的定理 4.1, 可知结论成立. 这里的条件并不难达到, 事实上文献 [4] 中指出, 对于 SP 问题的函数空间, 有稠密子集 P_0, 使得在 P_0 中 SP 的所有可行点 MPEC-LICQ 成立, 且对于局部极小点 $\bar{x'}_n$, 二阶充分条件成立 [4].

3 神经网络方法

在 SP_{ε_n} 中, 记

$$c(x')=\begin{cases}-G(x,y),\\ \lambda^T g(x,y)-\varepsilon_n g(x')=\nabla_y L(x,y,\lambda),\\ -g(x,y),\\ -\lambda,\end{cases}$$

则 $\mathrm{SP}_{\varepsilon_n}$ 问题可以改写为

$$\min_{x'}\quad F(x'),$$
$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}c(x')\le 0,\\ q(x')=0.\end{cases}$$

本文利用文献 [7] 的方法，结合上述扰动思想，求解二层规划问题的一般方法为

$E(x',\upsilon,\mu)=F(x')+\upsilon^Tq(x')+\mu^Tc(x')\mu$ 神经网络动态方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dx'}{dt}=-\nabla_{x'}L(x',\upsilon,\mu),\\ \dfrac{d\upsilon}{dt}=\nabla_{\upsilon}L(x',\upsilon,\mu),\\ \dfrac{d\mu}{dt}=\nabla_{\mu}L(x',\upsilon,\mu),\end{cases}\tag{3.1}$$

写成标量的形式是

$$\begin{cases}\dfrac{dx'_i}{dt}=-\dfrac{\partial F(x')}{\partial x'_i}-\upsilon\dfrac{\partial(f_y(x')+\lambda g_y(x'))}{\partial x'_i}\\ \qquad+\displaystyle\sum_{i=1}^{m_1}\mu_k^2\frac{\partial G_k(x')}{\partial x'_i}-\sum_{i=1}^{m_2}\mu_k^2\frac{\partial g_k(x')}{\partial x'_i}-\sum_{i=1}^{m_2}\mu_k^2\frac{\partial(\lambda_k g_k(x')-\varepsilon_n)}{\partial x'_i},\\ \dfrac{d\upsilon}{dt}=f_y(x')+\lambda g_y(x'),\\ \dfrac{d\mu_k}{dt}=-G(x,y)\mu_k\qquad(k=1,\,2,\,\cdots m_1),\\ \dfrac{d\mu_k}{dt}=(\lambda^Tg(x,y)-\varepsilon_n)\mu_k\quad(k=m_1+1,\,m_1+2,\,\cdots m_1+m_2),\\ \dfrac{d\mu_k}{dt}=-g(x,y)\quad(k=m_1+m_2+1,\,m_1+m_2+2,\,\cdots m_1+2m_2.\end{cases}$$

定理 2 如果在 BLP 问题的可行点 $\bar{x'}_n$ 处 MPEC-LICQ 成立, 且 $\mathrm{SP}_{\varepsilon_n}$ 满足二阶充分条件, 则 $\bar{x'}_n$ 是系统 (3.1) 的稳定点.

定理 2 的证明 若 $\bar{x'}_n$ 处 MPEC-LICQ 成立, 则存在 $\bar{x'}_n$ 的邻域 U 以及 $\varepsilon>0$, 使得 LICQ 在任一点 $z\in U\cap F(\mathrm{SP}_{\varepsilon_n})$ 成立 [2], 又 $\mathrm{SP}_{\varepsilon_n}$ 满足二阶充分条件, $\bar{x'}_n$ 是 BLP 问题的局部最优解, 且存在 $\bar{x'}_n$ 的邻域 U 和 $\bar{\varepsilon}$, 使得对 $\varepsilon_n<\bar{\varepsilon},\mathrm{SP}_{\varepsilon_n}$ 有唯一的稳定点 $\bar{x'}_n\bar{x'}_n\to\bar{x'}$.

由 KKT 条件知, $\bar{x'}_n$ 是 $E(x',\upsilon,\mu)$ 的鞍点, 即 $\bar{x'}_n$ 是 $E(x',\upsilon,\mu)$ 的稳定点, 由可微函数极值点的必要条件知定理成立.

4 算例

利用 Matlab 6.5 中的 ode45 命令, 取 $\varepsilon_n=0.001$.

例 1

$$\begin{aligned}&\max f_1(x,y)=-x,\\ \text{s.t.}\ \ &x\ge 0,\\ &\max f_2(x,y)=-y,\\ \text{s.t.}\ \ &x+y\ge 2,\\ &\ x-y\le 0,\\ &\ y\ge 0,\end{aligned}$$

结果是 $x=-0.0000,2.0000,1.0000,0.0000$.

例 2

$$
\begin{aligned}
&\min_{x\geq 0} \quad F(x,y) = -{x_1}^2 - 3{x_2}^2 - 4y_1 + {y_2}^2,\\
\text{s.t.}\quad & {x_1}^2 + 2x_2 \leq 4,\\
&\min_{y\geq 0} \quad f(x,y) = 2{x_1}^2 + {y_1}^2 - 5y_2,\\
&\ {x_1}^2 - 2x_1 + {x_2}^2 - 2y_1 + y_2 \geq -3,\\
&\ x_2 + 3y_1 - 4y_2 \geq 4,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

可得 $x = 0.0000, 2.0000, 1.8750, 0.9062, 0, 1.2500, fval = -18.6787.$

参 考 文 献

[1] Dempe S. Foundations of bilevel programming[M]. Netherland: Kluwer Academic Publishers, 2002.

[2] Bard J F. Convex two-level optimization[J]. Math. Program., 1988, 40(1): 15–27.

[3] Scheel H, Scholtes S. Mathematical programs with complementarity constraints: stationarity, optimality and sensitivity[J]. Math. Operations Research, 2000, 25(1): 1–21.

[4] Scholtes S., Convergence properties of a regularization scheme for mathematical programs with complementarity constraints[J]. SIAM J. Optim., 2001, 11 (4): 918–936.

[5] Izmailov A F. Mathematical programs with complementarity constraints: regularity, optimality conditions, and sensitivity[J]. Comput. Math. Phys., 2004, 44(7): 1145–1164.

[6] Gemayqzel B. Mathematical programs with complementarity constraints: convergence properties of a smoothing method[J]. Math. Operations Research, 2007, 32(2): 467–483.

[7] Lv Yibing, Hu Tiesong. A neural network approach for solving nonlinear bilevel programming problem[J]. Comput. Math. Appl., 2008, 55(12): 2823–2829.

NEURAL NETWORKS SOLUTION OF BILEVEL PROGRAMMING PROBLEM

PENG Ai-min

(*School of Mathematics and Quantitative Economics, Hubei University of Education, Wuhan 430205, China*)

Abstract: Here is the abstract of bilevel programming based on neural networks. By using complementarity constraints, a sufficient condition is considered. It improves the drawback that constraint qualification does not hold at any feasible point when a bilevel programming is changed into a single one. We arrive at a conclusion of neural networks solution for bilevel programming. The validity of the networks is demonstrated by several numerical examples.

Keywords: bilevel programming; perturted ; constraint qualification; neural networks

2010 MR Subject Classification: 90C30