Vol. 34 (2014)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

半 Fredholm 算子的一个注记

吴珍莺 [1]，曾清平 [2]

(1. 福州海峡职业技术学院基础教学部, 福建 福州 350014)

(2. 福建师范大学数学与计算机科学学院, 福建 福州 350007)

摘 要: 本文研究了 (上, 下) 半 Fredholm 算子的结构问题. 利用经典的算子理论方法, 由闭不变子空间诱导的两个映射, 获得了 (上, 下) 半 Fredholm 算子的多种新的等价刻画, 推广了 (上, 下) 半 Fredholm 算子的已有结果.

关键词: 半 Fredholm 算子; 左 (右) 移位 Samuel 重数

MR(2010) 主题分类号: 47A53 中图分类号: O177.2

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2014)01-0105-06

1 引言

本注记中, X,Y 表示复无限维 Banach 空间, $M^{\perp}$ 表示子空间 $M\subseteq X$ 的零化子. 用 $\mathcal{B}(X,Y)$ 表示从 X 到 Y 的有界线性算子全体, $\mathcal{B}(X):=\mathcal{B}(X,X)$. 对 $T\in\mathcal{B}(X),T^*$ 表示 T 的共轭算子, $\mathcal{R}(T)$ 或 $T(X)$ 表示 T 的值域, $\mathcal{N}(T)$ 表示 T 的零空间, $\alpha(T)$ 和 $\beta(T)$ 分别表示 T 的零维和亏维, 即 $\alpha(T)=\mathrm{dim}\mathcal{N}(T)$, $\beta(T)=\mathrm{dim}X/\mathcal{R}(T)$. Fredholm 算子集 $\Phi(X)=\{T\in\mathcal{B}(X):\alpha(T)<\infty$ 且 $\beta(T)<\infty\}$, 上半 Fredholm 算子集 $\Phi_+(X)=\{T\in\mathcal{B}(X):\alpha(T)<\infty$ 且 $\mathcal{R}(T)$闭$\}$, 下半 Fredholm 算子集 $\Phi_-(X)=\{T\in\mathcal{B}(X):\beta(T)<\infty\}$, 半 Fredholm 算子集 $\Phi_{\pm}(X)=\Phi_+(X)\cup\Phi_-(X)$. 易知, $T^*\in\Phi_-(X^*)\Leftrightarrow T\in\Phi_+(X)$, $T^*\in\Phi_+(X^*)\Leftrightarrow T\in\Phi_-(X)$. 对 $T\in\Phi_{\pm}(X)$, 定义指标 $\mathrm{ind}(T)=\alpha(T)-\beta(T)$. 记 $\Phi_{m,n}(X)=\{T\in\mathcal{B}(X):\mathcal{R}(T)$ 闭, $\alpha(T)=m,\beta(T)=n\}$, 此处 $m,n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$.

用 $Lat(T)$ 表示 $T\in\mathcal{B}(X)$ 的不变子空间格. 对闭子空间 $M\in Lat(T)$, T 可相应地诱导出如下的两个映射: T 在 M 上的限制 $T|_M\in\mathcal{B}(M)$ 和 $T_M\in\mathcal{B}(X/M):x+M\longrightarrow Tx+M$. 本文主要由闭子空间 $M\in Lat(T)$ 和相应的诱导映射 $T|_M\in\mathcal{B}(M)$ 和 $T_M\in\mathcal{B}(X/M)$, 给出 (上, 下) 半 Fredholm 算子的等价刻画, 深化对半 Fredholm 算子结构的理解.

首先, 利用一个诱导映射 $T|_M\in\mathcal{B}(M)$ (或 $T_M\in\mathcal{B}(X/M)$), 给出 (上, 下) 半 Fredholm 算子的等价刻画.

命题 1 设 $T\in\mathcal{B}(X)$, 则以下陈述等价:

(1) $T\in\Phi_+(X)$.

(2) 对任意闭子空间 $M\in Lat(T)$, 有 $T|_M\in\Phi_+(M)$.

(3) 存在 $M\in Lat(T),\mathrm{dim}X/M<\infty$, 使得 $T|_M\in\Phi_+(M)$.

(4) 对任意的 $M\in Lat(T),\mathrm{dim}M<\infty$, 有 $T_M\in\Phi_+(X/M)$.

*收稿日期: 2011-11-16 接收日期: 2012-06-20

基金项目: 国家自然科学基金 (11171066); 高等学校博士学科点专项科研基金 (20103503110010).

作者简介: 吴珍莺 (1984–), 女, 福建莆田, 助教, 主要研究方向: 算子理论研究.

(5) 存在 $M\in Lat(T),\dim M<\infty$, 使得 $T_M\in\Phi_+(X/M)$.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 对任意闭子空间 $M\in Lat(T)$, 由文献 [4] 的引理 4.3.1 可知, $R(T|_M)$ 闭. 又 $\alpha(T|_M)=\dim\mathcal{N}(T)\cap M\le\alpha(T)<\infty$, 从而 $T|_M\in\Phi_+(M)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 显然.

(3) $\Rightarrow$ (1) 存在闭子空间 $N\subseteq X$, 使得 $X=N\oplus M$, 则 $T=\begin{pmatrix} T|_M & T_1\\ 0 & T_2\end{pmatrix}\in\mathcal{B}(M\oplus N)$. 由

$$\dim N=\dim X/M<\infty,$$

则 $T_2\in\Phi(N)$. 由文献 [2] 的引理 2.7 可知, $T|_M\in\Phi_+(M)\Rightarrow T\in\Phi_+(X)$.

(1) $\Rightarrow$ (4) 对任意的 $M\in Lat(T),\dim M<\infty$, 则存在闭子空间 $N\subseteq X$, 使得 $X=N\oplus M$, 从而 $X^*=M^\perp\oplus N^\perp,\dim N^\perp=\dim(X/N)^*=\dim X/N=\dim M<\infty$, 所以

$$\begin{aligned}\beta(T^*|_{M^\perp}) &= \dim M^\perp/T^*(M^\perp)=\dim X^*/T^*(M^\perp)-\dim X^*/M^\perp\\ &= \dim X^*/\mathcal{R}(T^*)+\dim\mathcal{R}(T^*)/T^*(M^\perp)-\dim X^*/M^\perp\\ &= \beta(T^*)+\dim(T^*(M^\perp)+T^*(N^\perp))/T^*(M^\perp)-\dim N^\perp\\ &\le \beta(T^*)+\dim T^*(N^\perp)-\dim N^\perp\le\beta(T^*).\end{aligned}$$

由 $T\in\Phi_+(X)$, 可得 $T^*\in\Phi_-(X^*)$, 即 $\beta(T^*)<\infty$, 因此 $\beta(T^*|_{M^\perp})<\infty$, 即 $T^*|_{M^\perp}\in\Phi_-(M^\perp)$. 而 $T_M^*=JT^*|_{M^\perp}J^{-1}$, 其中 $J\in\mathcal{B}(M^\perp,(X/M)^*)$ 是同构映射, 所以 $T_M^*\in\Phi_-((X/M)^*)$, 从而 $T_M\in\Phi_+(X/M)$.

(4) $\Rightarrow$ (5) 显然.

(5) $\Rightarrow$ (1) 存在闭子空间 $N\subseteq X$, 使得 $X=N\oplus M$, 则 $X^*=M^\perp\oplus N^\perp$. 由 $M\in Lat(T)$ 可知 $M^\perp\in Lat(T^*)$, 从而 $T^*=\begin{pmatrix} T^*|_{M^\perp} & T_3\\ 0 & T_4\end{pmatrix}\in\mathcal{B}(M^\perp\oplus N^\perp)$. 由

$$\dim N^\perp=\dim(X/N)^*=\dim X/N=\dim M<\infty,$$

可得 $T_4\in\Phi(N^\perp)$. 由文献 [2] 的引理 2.7, 可知 $T^*|_{M^\perp}\in\Phi_-(M^\perp)\Leftrightarrow T^*\in\Phi_-(X^*)$. 由 $T_M\in\Phi_+(X/M)$, 可得 $T_M^*\in\Phi_-((X/M)^*)$. 又 $T_M^*=JT^*|_{M^\perp}J^{-1}$, 其中 $J\in\mathcal{B}(M^\perp,(X/M)^*)$ 是同构映射, 从而 $T^*|_{M^\perp}\in\Phi_-(M^\perp)$, 所以 $T^*\in\Phi_-(X^*)$, 故 $T\in\Phi_+(X)$.

对偶地, 由命题 1 我们有如下的结果.

命题 2 设 $T\in\mathcal{B}(X)$, 则以下陈述等价:

(1) $T\in\Phi_-(X)$.

(2) 对任意闭子空间 $M\in Lat(T)$, 有 $T_M\in\Phi_-(X/M)$.

(3) 存在 $M\in Lat(T),\dim M<\infty$, 使得 $T_M\in\Phi_-(X/M)$.

(4) 对任意的 $M\in Lat(T),\dim X/M<\infty$, 有 $T|_M\in\Phi_-(M)$.

(5) 存在 $M\in Lat(T),\dim X/M<\infty$, 使得 $T|_M\in\Phi_-(M)$.

下面的反例说明, 命题 1 的 (3) 和 (5), 命题 2 的 (3) 和 (5) 中有限维的条件是必不可少的.

例 3 设 $X=M\oplus N,\dim M=\dim N=\infty$, 定义 $T=I\oplus 0\in\mathcal{B}(M\oplus N)$, 易知

$$T|_{M\oplus\{0\}}=I|_{M\oplus\{0\}},T_{\{0\}\oplus N}=I_{\{0\}\oplus N},$$

从而 $T|_{M\oplus\{0\}}\in\Phi(M\oplus\{0\}), T_{\{0\}\oplus N}\in\Phi(X/(\{0\}\oplus N))$, 但 $T\notin\Phi_+(X)\cup\Phi_-(X)$.

2 主要结果

在给出进一步的结果之前, 需要如下的一些概念和事实.

对 $T\in\mathcal{B}(X)$, 定义升指数 $\mathrm{asc}(T)=\inf\{n\in\mathbb{N}:\ \mathcal{N}(T^n)=\mathcal{N}(T^{n+1})\}$, 降指数

$$\mathrm{des}(T)=\inf\{n\in\mathbb{N}:\ \mathcal{R}(T^n)=\mathcal{R}(T^{n+1})\},$$

规定 $\inf\emptyset=\infty$. 上半 Browder 算子集 $B_+(X)=\{T\in\mathcal{B}(X):T\in\Phi_+(X),\ 且\ \mathrm{asc}(T)<\infty\}$, 下半 Browder 算子集 $B_-(X)=\{T\in\mathcal{B}(X):T\in\Phi_-(X),\ 且\ \mathrm{des}(T)<\infty\}$, 半正则算子集 $\mathcal{S}(X)=\{T\in\mathcal{B}(X):\mathcal{R}(T)\ 闭且\ \mathcal{N}(T^n)\subseteq\mathcal{R}(T),\ 对任意\ n\in\mathbb{N}\}$.

闭子空间对 (M,N) 称为 $T\in\mathcal{B}(X)$ 的约化子空间对 (记为 $(M,N)\in Red(T)$), 如果 $X=M\oplus N$ 且 $M,N\in Lat(T)$. 称 T 有广义 Kato 分解 (记为 GKD), 如果存在 $(M,N)\in Red(T)$ 使得 $T|_M\in\mathcal{S}(M)$ 且 $T|_N$ 是拟幂零; 称 T 是 Kato 型算子 (记为 $T\in\mathcal{K}_a(X)$), 若 T 有 $\mathrm{GKD}(M,N)$ 使得 $T|_N$ 是幂零; 称 T 是本性半正则算子 (记为 $T\in\mathcal{S}_e(X)$), 若 T 有 $\mathrm{GKD}(M,N)$ 且 $\dim N<\infty$. 由文献 [3] 的定理 1.62 可知, $\Phi_-(X)\cup\Phi_+(X)=\Phi_\pm(X)\subseteq\mathcal{S}_e(X)$.

对 $T\in\mathcal{B}(X)$, 定义超值域 $\mathcal{R}(T^\infty)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}(T^n)$, 超核 $\mathcal{N}(T^\infty)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{N}(T^n)$, 易见 $\mathcal{R}(T^\infty),\mathcal{N}(T^\infty)\in Lat(T)$. 对子空间 $M_1,M_2\subseteq X$, 称 M_1 本性包含于 M_2 (记为 $M_1\subseteq_e M_2$), 若存在有限维子空间 $F\subseteq X$, 使得 $M_1\subseteq M_2+F$. 易见, $M\subseteq_e N\Leftrightarrow\dim M/(M\cap N)<\infty$. 由文献 [3] 的定理 1.48 可知, $T\in\mathcal{S}_e(X)\Leftrightarrow\mathcal{R}(T)$ 闭且 $\mathcal{N}(T^\infty)\subseteq_e\mathcal{R}(T)\Leftrightarrow\mathcal{R}(T)$ 闭且 $\mathcal{N}(T^\infty)\subseteq_e\mathcal{R}(T^\infty)$.

Grabiner[6] 定义了拓扑一致降指数算子: 称 $T\in\mathcal{B}(X)$ 对 $n\geq d$ 有拓扑一致降指数 (记为 $T\in\mathrm{TUD}_d(X)$), 若存在 $d\in\mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{R}(T)+\mathcal{N}(T^d)=\mathcal{R}(T)+\mathcal{N}(T^\infty)$ 且 $\mathcal{R}(T)+\mathcal{N}(T^d)$ 闭. 拓扑一致降指数算子集 $\mathrm{TUD}(X)=\bigcup\limits_{d=0}^{\infty}\mathrm{TUD}_d(X)$ 涵盖了 Fredholm 理论中的诸多算子类, 如 $\mathrm{TUD}_0(X)=\mathcal{S}(X), B_+(X)\cup B_-(X)\subseteq\Phi_\pm(X)\subseteq\mathcal{S}_e(X)\subseteq\mathcal{K}_a(X)\subseteq\mathrm{TUD}(X)$. 更多关于此类算子的摄动理论可参阅文献 [6].

Fang[5] 定义了 $T\in\Phi_\pm(X)$ 的左 (右) 移位 Samuel 重数: 对 $T\in\Phi_\pm(X)$, 它的右移位 Samuel 重数 (shift Samuel multiplicity) 和左移位 Samuel 重数 (backward shift Samuel multiplicity), 分别定义为

$$s\_mul(T)=\lim_{k\to\infty}\frac{\beta(T^k)}{k};\quad b.s.\_mul(T)=\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha(T^k)}{k}.$$

由文献 [5] 的定理 2 可知: 对 $T\in\Phi_\pm(X)$, T 的左、右移位 Samuel 重数 $b.s.\_mul(T)$, $s\_mul(T)\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, 且指标 $\mathrm{ind}(T)=b.s.\_mul(T)-s\_mul(T)$. 同时, 当 $n\in\mathbb{N}$ 足够大时, 有

$$\begin{aligned}&b.s.\_mul(T)=\dim\mathcal{N}(T)\cap\mathcal{R}(T^n)=\dim\mathcal{N}(T)\cap\mathcal{R}(T^\infty),\\&s\_mul(T)=\dim X/(\mathcal{R}(T)+\mathcal{N}(T^n))=\dim X/(\mathcal{R}(T)+\mathcal{N}(T^\infty)).\end{aligned}$$

接下来, 利用两个诱导映射 $T|_M\in\mathcal{B}(M)$ 和 $T_M\in\mathcal{B}(X/M)$, 给出 (上, 下) 半 Fredholm 算子的等价刻画.

定理 4 设 $T\in\mathcal{B}(X)$, 则以下陈述等价:

(1) $T\in\Phi_+(X)$.

(2) 存在闭子空间 $M\in Lat(T), m\in\mathbb{N}$, 使得 $T|_M\in\Phi_{m,0}(M)$, $T_M\in B_+(X/M)$.

(3) 存在闭子空间 $M\in Lat(T)$, 使得 $T|_M\in\Phi_+(M)$, $T_M\in\Phi_+(X/M)$.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 取 $M=\mathcal{R}(T^\infty)$, 易知 M 闭. 由文献 [5] 的引理 7 可知, $T|_M$ 满射, 即 $\beta(T|_M)=0$. 又 $\alpha(T|_M)\le\alpha(T)<\infty$, 且

$$\alpha(T|_M)=\dim\mathcal{N}(T)\cap M=\dim\mathcal{N}(T)\cap\mathcal{R}(T^\infty)=b.s.\_mul(T),$$

则 $T|_M\in\Phi_{m,0}(X)$, 其中 $m=b.s.\_mul(T)\in\mathbb{N}$. 由 $\mathcal{R}(T)$ 闭, $M=T(M)\subseteq\mathcal{R}(T)$, 且 $\mathcal{R}(T_M)=(\mathcal{R}(T)+M)/M=\mathcal{R}(T)/M$, 可见 $\mathcal{R}(T_M)$ 闭. 由文献 [6] 的引理 2.1 可得

$$T^{-1}(M)/M=T^{-1}(T(M))/M=(\mathcal{N}(T)+M)/M=\mathcal{N}(T)/(\mathcal{N}(T)\cap M),$$

从而 $\alpha(T_M)\le\alpha(T)<\infty$, 则 $T_M\in\Phi_+(X/M)$. 由 $T\in\Phi_+(X)\subseteq\mathcal{S}_e(X)$, 则 $\mathcal{N}(T^\infty)\subseteq_e\mathcal{R}(T^\infty)=M$, 即

$$\dim\mathcal{N}(T^\infty)/(\mathcal{N}(T^\infty)\cap\mathcal{R}(T^\infty))=\dim(\mathcal{N}(T^\infty)+\mathcal{R}(T^\infty))/\mathcal{R}(T^\infty)<\infty.$$

又由 $T(M)=M$, 易见对 $k\in\mathbb{N}$, 有 $T^k(M)=M$, 即 $T^k(\mathcal{R}(T^\infty))=\mathcal{R}(T^\infty)$. 结合文献 [6] 的引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned}N(T_M^\infty)&=\bigcup_{k=1}^\infty T^{-k}(M)/M=\bigcup_{k=1}^\infty T^{-k}(\mathcal{R}(T^\infty))/\mathcal{R}(T^\infty)=\bigcup_{k=1}^\infty T^{-k}(T^k(\mathcal{R}(T^\infty)))/\mathcal{R}(T^\infty)\\&=\bigcup_{k=1}^\infty(\mathcal{N}(T^k)+\mathcal{R}(T^\infty))/\mathcal{R}(T^\infty)=(\mathcal{N}(T^\infty)+\mathcal{R}(T^\infty))/\mathcal{R}(T^\infty),\end{aligned}$$

从而 $\dim\mathcal{N}(T_M^\infty)<\infty$, 因此 $\operatorname{asc}(T_M)<\infty$, 那么 $T_M\in B_+(X/M)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 显然.

(3) $\Rightarrow$ (1) 由假设, 存在闭子空间 $M\in Lat(T)$, 使得 $T(M)$ 闭, $\alpha(T|_M)=\dim\mathcal{N}(T)\cap M<\infty, \mathcal{R}(T_M)$ 闭, 且 $\alpha(T_M)<\infty$. 由 $T(M)\subseteq M$ 可得, $M\subseteq\mathcal{N}(T)+M\subseteq T^{-1}(M)$, 所以存在子空间 $F, \dim F=\alpha(T_M)=\dim T^{-1}(M)/M$, 使得 $T^{-1}(M)=M\oplus F$, 显然 $\dim T(F)\le\dim F<\infty$. 由文献 [6] 的引理 2.1(d) 可得

$$\mathcal{R}(T)\cap M=T(X)\cap M=T(X\cap T^{-1}(M))=T(T^{-1}(M))=T(M\oplus F)=T(M)+T(F),$$

故 $\mathcal{R}(T)\cap M$ 闭. 又 $\mathcal{R}(T_M)=(\mathcal{R}(T)+M)/M$ 闭, 则 $\mathcal{R}(T)+M$ 闭, 从而由文献 [1] 的定理 2, 可得 $\mathcal{R}(T)$ 闭. 由文献 [6] 的引理 2.1(b) 可得

$$\begin{aligned}&\alpha(T)=\dim\mathcal{N}(T)=\dim\mathcal{N}(T)\cap M+\dim\mathcal{N}(T)/(\mathcal{N}(T)\cap M)\\=\ &\alpha(T|_M)+\dim(\mathcal{N}(T)+M)/M\le\alpha(T|_M)+\dim T^{-1}(M)/M=\alpha(T|_M)+\alpha(T_M)<\infty,\end{aligned}$$

故 $T\in\Phi_+(X)$.

定理 5 设 $T\in\mathcal{B}(X)$, 则以下陈述等价:

(1) $T \in \Phi_-(X)$.

(2) 存在闭子空间 $M \in Lat(T), m \in \mathbb{N}$, 使得 $T_M \in \Phi_{0,m}(X/M)$, $T|_M \in B_-(M)$.

(3) 存在闭子空间 $M \in Lat(T)$, 使得 $T_M \in \Phi_-(X/M)$, $T|_M \in \Phi_-(M)$.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 取 $M = \overline{\mathcal{N}(T^\infty)}$, 易知 $M \in Lat(T)$. 由文献 [6] 的定理 3.4, 可得 T_M 是下有界算子, 即 $\alpha(T_M) = 0, T^{-1}(M) = M$. 又

$$\beta(T_M) = \dim(X/M)/((\mathcal{R}(T)+M)/M) = \dim X/(\mathcal{R}(T)+M) \leq \dim X/\mathcal{R}(T) = \beta(T),$$

即 $\beta(T_M) \leq \beta(T) < \infty$, 又由 $T \in \Phi_-(X) \subseteq \Phi_\pm(X) \subseteq \mathrm{TUD}(X)$, 不妨设 $T \in \mathrm{TUD}_d(X)$ $(d \in \mathbb{N})$, 可知 $\mathcal{R}(T) + \mathcal{N}(T^\infty)$ 闭. 又

$$\mathcal{R}(T) + \mathcal{N}(T^\infty) \subseteq \mathcal{R}(T) + \overline{\mathcal{N}(T^\infty)} \subseteq \overline{\mathcal{R}(T) + \mathcal{N}(T^\infty)} = \mathcal{R}(T) + \mathcal{N}(T^\infty),$$

则 $\mathcal{R}(T) + \mathcal{N}(T^\infty) = \mathcal{R}(T) + \overline{\mathcal{N}(T^\infty)}$, 从而

$$\begin{aligned} \beta(T_M) &= \dim X/(\mathcal{R}(T)+M) = \dim X/(\mathcal{R}(T) + \overline{\mathcal{N}(T^\infty)}) \\ &= \dim X/(\mathcal{R}(T) + \mathcal{N}(T^\infty)) = s\_mul(T), \end{aligned}$$

故 $T_M \in \Phi_{0,m}(X/M)$, 其中 $m = s\_mul(T) \in \mathbb{N}$. 由 $T \in \Phi_-(X) \subseteq \mathcal{S}_e(X)$, 可得 $\mathcal{N}(T^\infty) \subseteq_e \mathcal{R}(T)$, 易见 $\overline{\mathcal{N}(T^\infty)} \subseteq_e \mathcal{R}(T)$, 即 $\dim\overline{\mathcal{N}(T^\infty)}/(\overline{\mathcal{N}(T^\infty)} \cap \mathcal{R}(T)) < \infty$. 由 $T^{-1}(M) = M$, 可得 $T(M) = \mathcal{R}(T) \cap M$. 又

$$\beta(T|_M) = \dim M/T(M) = \dim M/(\mathcal{R}(T) \cap M) = \dim\overline{\mathcal{N}(T^\infty)}/(\overline{\mathcal{N}(T^\infty)} \cap \mathcal{R}(T)) < \infty,$$

因此 $T|_M \in \Phi_-(M)$. 由 $T^{-1}(M) = M$, 可得 $T^{-k}(M) = M$, 从而 $T^k(M) = \mathcal{R}(T^k) \cap M$, 对任意的 $k \in \mathbb{N}$. 又由 $T \in \mathrm{TUD}_d(X)$ 和文献 [6] 的引理 3.6(c) 可知

$$\mathcal{R}(T^d) \cap \overline{\mathcal{N}(T^\infty)} = \mathcal{R}(T^\infty) \cap \overline{\mathcal{N}(T^\infty)},$$

则 $\mathcal{R}(T^d) \cap M = \mathcal{R}(T^d) \cap \overline{\mathcal{N}(T^\infty)} = \mathcal{R}(T^{d+1}) \cap \overline{\mathcal{N}(T^\infty)} = \mathcal{R}(T^{d+1}) \cap M$, 因此 $T^d(M) = T^{d+1}(M)$, 从而 $\mathrm{des}(T|_M) \leq d < \infty$, 故 $T|_M \in B_-(M)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 显然.

(3) $\Rightarrow$ (1) 由假设, 存在闭子空间 $M \in Lat(T)$, 使得 $\beta(T|_M) = \dim M/T(M) < \infty$, $\beta(T_M) = \dim(X/M)/((\mathcal{R}(T)+M)/M) = \dim X/(\mathcal{R}(T)+M) < \infty$. 存在子空间 $F \subseteq X$, 使得 $\dim F = \beta(T|_M), M = T(M) \oplus F$. 由

$$\beta(T_M) = \dim X/(\mathcal{R}(T)+M) = \dim X/(\mathcal{R}(T)+T(M)+F) = \dim X/(\mathcal{R}(T)+F),$$

可得

$$\begin{aligned} \beta(T) &= \dim X/\mathcal{R}(T) \\ &= \dim X/(\mathcal{R}(T)+F) + \dim(\mathcal{R}(T)+F)/\mathcal{R}(T) \leq \beta(T_M) + \beta(T|_M) < \infty, \end{aligned}$$

因此 $T \in \Phi_-(X)$.

注 这里对定理 4 和定理 5 的"(3) $\Rightarrow$ (1)"进行一些说明.

当定理 4 的条件 (3) 中 $M \in Lat(T)$ 是可补的, 则"(3) $\Rightarrow$ (1)"是易知的. 事实上, 不妨设 $X = M \oplus N$, 此时 $T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(M \oplus N)$, 其中 $A \in \mathcal{B}(M), B \in \mathcal{B}(N), C \in \mathcal{B}(N, M)$. 由 $A = T|_M, B = J^{-1}T_M J$, 这里 $J \in \mathcal{B}(N, X/M)$ 是自然同构映射, 可知 $A \in \Phi_+(M), B \in \Phi_+(N)$, 从而由上三角算子矩阵的知识可知, $T \in \Phi_+(X)$.

同样地, 当定理 5 的条件 (3) 中 $M \in Lat(T)$ 是可补的, 则"(3) $\Rightarrow$ (1)"也是易知的.

当定理 4 和定理 5 的条件 (3) 中 $M \in Lat(T)$ 不可补时, 上述矩阵分块的证明方法将失效.

致谢 衷心感谢钟怀杰教授对本文的悉心指导.

参 考 文 献

[1] 陈剑岚. 关于算子闭值域的两个定理 [J]. 福建师范大学学报 (自然科学版), 2010, 26(2): 16–19.

[2] 张世芳, 钟怀杰, 武俊德. 上三角算子矩阵的谱 [J]. 数学学报, 2011, 54(1): 41–60.

[3] Aiena P. Fredholm and local spectral theory, with application to multipliers [M]. Berlin: Kluwer Academic Publishers, 2004.

[4] Caradus S R, Pfaffenberger W E, Yood B. Calkin algebras and algebras of operators on Banach spaces [M]. New York: Marcel Dekker, 1974.

[5] Fang X. Samuel multiplicity and the structure of semi-Fredholm operator [J]. Adv. Math., 2004, 186: 411–437.

[6] Grabiner S. Uniform ascent and descent of bounded operators [J]. J. Math. Soc. Japan, 1982, 34(2): 317–337.

A NOTE ON SEMI-FREDHOLM OPERATORS

WU Zhen-ying [1] , ZENG Qing-ping[2]

(*1. Dept. of Basic Education, Fuzhou Strait Vocation Technological College, Fuzhou 350014, China*)

(*2.School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China*)

Abstract: In this paper, we investigate the structure problem of (upper and lower) semi-Fredholm operators. Utilizing the classical methods in operator theory, we obtain several new characterizations of (upper and lower) semi-Fredholm operators, via the two corresponding maps induced by the closed invariant subspace, which generalize those results in the literature.

Keywords: semi-Fredholm operators; (backward) shift Samuel multiplicity

2010 MR Subject Classification: 47A53